

**БЕКОВ САБИТ СЕГИЗБАЕВИЧ**

**Канондық емес лагранжиан материясы бар модификацияланған  
гравитация теориясын зерттеу**

6D060400 – Физика

Философия докторы (PhD)  
дәрежесін алу үшін дайындалған диссертация

Ғылыми кеңесшілер  
физика-математика ғылымдарының докторы,  
профессор  
Р. Мырзакулов

физика-математика ғылымдарының кандидаты,  
доцент  
К.Р. Мырзакулов

Шетелдік ғылыми кеңесші  
доктор PhD,  
профессор  
Д. Синглетон  
(Калифорния мемлекеттік  
университеті, АҚШ)

## МАЗМҰНЫ

<b>БЕЛГІЛЕУЛЕР МЕН ҚЫСҚАРТУЛАР</b> .....	4
<b>КІРІСПЕ</b> .....	5
<b>1 ГРАВИТАЦИЯНЫҢ МОДИФИКАЦИЯЛАНҒАН ТЕОРИЯСЫ ШЕҢБЕРІНДЕ ӘЛЕМНІҢ ҮДЕМЕЛІ ҰЛҒАЮЫНЫҢ БІРІНШІ КЕЗЕҢІ</b> .....	12
1.1 Формализм негіздері.....	14
1.1.1 Метрикалық формализмдегі Эйнштейн-Гильберт әсері.....	15
1.1.2 Палатини формализміндегі Эйнштейн-Гильберт әсері.....	16
1.2 Палатини формализміндегі $f(R)$ гравитациясының негіздері.....	20
1.3 $f(R)$ гравитация теориясының скалярлық-тензорлық көріністері.....	27
1.4 $f(R)$ гравитациядағы инфляция.....	29
1.5 Палатини формализмінде $f(R)$ гравитациясының баяу сырғу инфляциясы.....	35
<b>2 КҮҢГІРТ ЭНЕРГИЯНЫҢ КВИНТЭССЕНЦИЯ ПОТЕНЦИАЛЫН ГАУСС ПРОЦЕСІНДЕ РЕКОНСТРУКЦИЯЛАУ</b> .....	42
2.1 Күңгірт энергияның квинтэссенция потенциалын Гаусс процесінде реконструкциялауда қолданылатын әдістер мен модельдер.....	43
2.2 Күңгірт энергияның квинтэссенция потенциалын Гаусс процесінде реконструкциялауда алынған нәтижелер мен талқылаулар.....	47
2.2.1 Бекітілмеген $H_0$ үшін, $V(\phi)$ потенциалды реконструкциялау.....	49
2.2.2 $H_0 = 67.40 \pm 0.5 \text{ км с}^{-1} \text{ Мпк}$ болғанда, $V(\phi)$ потенциалдың реконструкциясы.....	51
2.2.3 $H_0 = 73.52 \pm 1.62 \text{ км с}^{-1} \text{ Мпк}$ болғанда, $V(\phi)$ потенциалдың реконструкциясы.....	53
<b>3 СКАЛЯР ӨРІСІ БАР ТЕЛЕПАРАЛЛЕЛЬ ГРАВИТАЦИЯДАҒЫ ӘЛЕМНІҢ ЭВОЛЮЦИЯСЫ</b> .....	61
3.1 Нетер теоремасының негіздері.....	61
3.1.1 Еркін бөлшектер үшін Нетер теоремасы.....	66
3.2 Телепараллель гравитациясы мен скаляр-тензорлық теория көмегімен жазық және изотропты Әлемнің эволюциясын сипаттау.....	67
3.2.1 Телепараллель гравитация үшін әсер және қозғалыс теңдеулері.....	68
3.2.2 Телепараллель гравитацияда Нетер теоремасын қолдану.....	69
3.2.3 Телепараллель гравитация үшін космологиялық шешімдер.....	71
3.3 Нетер теорема әдісін скаляр өрісті $f(T, B)$ телепараллель гравитация теориясында қолдану.....	72
3.3.1 $f(T, B)$ гравитациясындағы әсер және қозғалыс теңдеулері.....	72
3.3.2 $f(T, B)$ гравитациясы үшін Нетер теорема әдісін қолдану.....	74
<b>4 ФЕРМИОНДЫҚ ӨРІСІ БАР ГРАВИТАЦИЯ ТЕОРИЯЛАРЫНДАҒЫ ӘЛЕМНІҢ ЭВОЛЮЦИЯСЫ</b> .....	80
4.1 Нетер теоремасын фермиондық өрісте $f(R)$ гравитациясының кейбір	

қосымшаларында қолдану.....	80
4.1.1 $f$ - эссенциялы $f(R)$ гравитациясы .....	81
4.1.2 Нетер теорема әдісін $f(R)$ гравитация мен $f$ -эссенцияда қолдану.....	83
4.1.3 $f(R)$ гравитация мен $f$ -эссенция үшін космологиялық шешімдер.....	86
4.2 Нетер теорема әдісін фермиондық өрісі бар $f(T, B)$ телепараллель гравитациясында қолдану.....	88
4.2.1 $f(T, B)$ телепараллель гравитациядағы әсер және қозғалыс теңдеулері	88
4.2.2 Нетер теорема әдісін $f(T, B)$ телепараллель гравитацияда қолдану.....	91
4.2.3 $f(T, B)$ телепараллель гравитациясы үшін нақты космологиялық шешімдер.....	95
<b>ҚОРЫТЫНДЫ</b> .....	98
<b>ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ</b> .....	100

## БЕЛГІЛЕУЛЕР МЕН ҚЫСҚАРТУЛАР

$a(t)$	– масштабты фактор
$R$	– қисықтық скаляры
$T$	– ширату скаляры
$\Lambda$	– космологиялық тұрақты
$H$	– Хаббл параметрі
WMAP	– Уилкинсон микротолқынды анизотропиялық зонды
CMB	– суық күңгірт материя
BAO	– барионды акустикалық осциллятор
ГП	– Гаусс процессі
Пк	– парсек
ЖСТ	– жалпы салыстырмалылық теориясы
КМ	– күңгірт материя
КЭ	– күңгірт энергия
КТ	– күй теңдеуі
ФТ	– Фридман теңдеуі
ФРУ	– Фридман-Робертсон-Уокер
ҒМФ	– ғарыштық микротолқынды фон
$\Lambda$ CDM	– $\Lambda$ суық күңгірт материя
SN Ia	– Ia типті асақын жаңа жұлдыздар

## КІРІСПЕ

### **Жұмыстың жалпы сипаттамасы.**

Диссертациялық жұмыс гравитацияның модификацияланған теориялары шеңберінде Әлемнің эволюциясының ерте және кеш дәуірін зерттеуге арналған, алынған космологиялық шешімдер заманауи бақылау деректеріне қайшы келмейді.

### **Тақырыптың өзектілігі.**

Қазіргі уақытта ғалымдар, Әлем шамамен 14 миллиард жыл бұрын Үлкен жарылыстан кейін пайда болып үдемелі ұлғая бастаған және пайда болған сәтте оның температурасы өте жоғары болған ( $T > 10^{28}$ ) деген қорытындыға келген [1]. Оның үдемелі ұлғаюының алғашқы минуттары бізге 1981 жылы Алан Гут ұсынған Әлемнің ұлғаюының инфляциялық кезеңдері немесе үдемелі ұлғаюдың бірінші кезеңі ретінде белгілі [2-4]. Әрі қарай, Әлемнің үдемелі ұлғаюы баяулап, ал оның температурасы сәйкесінше төмендеді. Ұлғаюдың инфляциялық кезеңінен кейін Әлемдегі элементар бөлшектердің туу және өзара әрекеттесу процесі басталады. Содан кейін материя дәуірі басталып, онда жұлдыздар, галактикалар және тағыда басқа объектілер қалыптаса бастады, яғни біздің Әлемнің құрылымы қалыптасты. Жиырмамыншы ғасырдың тоқсаныншы жылдары Ia(SN Ia) типті асқын жаңа жұлдыздарды ұзақ мерзімді бақылау барысында қазіргі уақытта Әлемнің үдемелі ұлғая бастағаны анықталды [5, 6]. Заманауи әдебиеттерде бұл дәуір Әлемнің екінші фазалық үдемелі ұлғаю дәуірі ретінде белгілі. Әлемнің бұл үдемелі ұлғаюының себебі әлі анықталмаған, бірақ Әлемде күнгірт энергия (КЭ) мен күнгірт материяның (КМ) қандай да бір түрі үстемдік етеді деген гипотеза ұсынылды. КМ (жасырын материя) Әлемдегі галактикаларды жоғары жылдамдықпен айналдырады, ал КЭ гравитацияға қарсы рөл атқарады және үлкен теріс қысымға ие болады деп саналады.

Стандартты теория, Эйнштейннің гравитациялық теориясына негізделген және қандайда бір үдеткіш көзі болып табылатын канондық скалярлық өріс (инфлатон) бар екендігі туралы постулаттарға сүйеніп, Әлемнің эволюциясының алғашқы кезеңіндегі үдемелі ұлғаюын оның пайда болуын, ірі масштабты құрылымды, реликті сәулеленудің анизотропиясын және элементар бөлшектердің пайда болу механизмін сәтті түсіндіреді [2, p. 100; 3, p. 532; 4, p. 347]. КЭ Әлемнің қайта үдемелі ұлғаюын [5, p. 1015; 6, p. 582] немесе кванттық гравитациялық теориясының құрылысын шешу үшін стандартты инфляциялық модельдің модификацияларын қолданады.

Соңғы бірнеше жылда деректерді жинау, талдау және сақтау процессін жақсартуға көмектесетін маңызды технологиялық программалар пайда болды. Бірақ кез-келген зерттеуде тікелей эксперименттер жасалынбай, қандай да бір мәселені шешу қиын. Сол сияқты, Әлемнің жаратылысын, құрлымын анықтауда тікелей эксперименттер жасалынбайды, сондықтан нақты шешілмеген мәселелер көп. Кейбір мәселелерді шешуге Машиналық оқыту әдістері арқылы жауап беруге болады. Машиналық оқытуды қолдау әдістері

қазіргі уақытта зерттеудің ең танымал және қызықты бағыттарының бірі болып табылады [7].

Қазіргі космологияда Әлемнің екінші фазалық үдемелі ұлғаю құбылысын түсіндіру үшін гравитацияның стандартты теориясы, яғни жалпы салыстырмалылық теориясының әртүрлі модификациялары қолданылады. Әдетте, теорияның мұндай модификацияларын екі түрге бөлуге болады:

– біріншісі скалярлық өрістер, квинтэссенция, фантомдық өрістер, тахиондық өрістер, Хиггс бозоны немесе фермиондық өрістер сияқты Лагранж функциясына әсерге зат өрістерінің жаңа құрамдастары қосылатын модельдер [8, 9].

Соңғы уақытта скалярлық және фермиондық өрістер космологияда белсенді түрде зерттелуде. Ең көп зерттелетін модельдер Әлемнің бірінші фазалы үдемелі ұлғаюын және кейінгі кезеңдерін қанағаттанарлық түрде түсіндіретін және гравитациялық өріспен минималды немесе минималды емес байланысқан скаляр өрістері бар модельдер болып табылады. Скаляр өрістер инфлатон немесе КЭ өрісінің рөлін атқарады. Сондай-ақ, фермиондық өрістерде Әлемнің әртүрлі фазадағы үдемелі ұлғаятын кезеңдерін және бірқалыпты ұлғаятын кезеңдерін жоғары деңгейде сипаттайды. Осы моделдердің кейбірінде фермиондық өріс Әлемнің үдемелі ұлғаюының ерте кезеңдерін және Әлемнің үдемелі ұлғаюының сценариінің екінші фазасы үшін КЭ рөлін космологиялық тұрақтыны немесе скаляр өрісті енгізуді қажет етпей-ақ, инфлатон рөлін атқарады.

– екіншісі бұл моделдерде Лагранж функциясы төрт өлшемді кеңістік-уақыттың геометриясына жауапты компоненттерді жалпылайтын модельдер, мысалы,  $f(R)$  гравитация теориясы (мұндағы  $R$  - Риччи скаляры), телепараллель гравитация,  $f(T)$  гравитация (мұндағы  $T$  - ширату скаляры) және олардың әртүрлі өзгертілген немесе біріктірілген теориялары [10-12]. Мысалы, телепараллель гравитация жалпы салыстырмалылық теориясының альтернативті теориясы болып табылады және оны А.Эйнштейннің өзі гравитациялық және электромагниттік өрістерді біріктіру үшін ұсынған. Лагранж функциясындағы қисықтық скалярын байланыс функциясымен ауыстыру арқылы  $F(R)$  гравитация теориясы үшін Эйнштейн-Гильберт әсерін толықтыруды 1970 жылы Х.А. Бухдал ұсынды [13]. Бұл гравитацияның модификацияланған теориясы инфляцияны, КЭ, космологиялық тұрақтыны сфералық симметриялы шешімдерді сипаттау үшін қолданылған.

Бұл модельдердің барлығы Әлемнің ұлғаюының ерте және кейінгі динамикасын сипаттай алады, бірақ олардың қайсысы нақтырақ және физиканың негізгі заңдарына қайшы келмейтінін одан әрі эксперименттік және бақылау деректері көрсетеді.

Өрістің қозғалыс теңдеулерін табудың екі әдісі бар. Олардың біріншісі стандартты метрикалық формализм болып табылады, онда өріс теңдеулерін әсерді метрикалық тензор  $g_{ik}$  арқылы вариациялап анықтау. Бұл формализмде аффиндік байланыс  $\Gamma_{jk}^i$  метрикалық тензорға  $g_{ik}$  тәуелді. Қозғалыс теңдеулерін

алудың екінші әдісі, мұнда метрикалық тензор  $g_{ik}$  және аффиндік байланыс  $\Gamma_{jk}^i$  тәуелсіз айнымалылар. Бұл әдіс бірінші ретті формализм (Палатини формализмі) ретінде белгілі [14], өйткені тәуелсіз метрикаға және байланысқа қатысты вариациялағанда, жалпы жағдайда метрикалық формализмдегі екінші ретті теңдеулер жүйесінің орнына бірінші ретті дифференциалдық теңдеулер жүйесі алынады. Бұл қозғалыс теңдеулерінің шешімдерін табуды жеңілдетеді. Қарастырылған екі әдіс сызықты емес лагранж үшін гравитациялық өрістің әртүрлі теңдеулеріне алып келеді, ал ЖСТ-ның әсері үшін олар бір-бірімен бірдей болады. Бұрын әртүрлі гравитация теорияларында біртекті және изотропты Фридман Әлемін сипаттау үшін осы әдістер қолданылған бірқатар мақалалар жариялаған [15, 16]. Сондай-ақ Палатини формализмінде ерте Әлемнің инфляциялық моделін зерттедік [17], мұнда алынған космологиялық шешімдер бақылау деректерімен жақсы үйлеседі.

Белгілі болғандай, жазық кеңістік-уақыттың өзінде сызықты емес теңдеулердің нақты шешімдерін табу қиын мәселе болып табылады, ал Эйнштейн теңдеулер жүйесі түріндегі гравитациялық өрісті есепке алу тапсырманы айтарлықтай қиындатады. Қазіргі кезде солитон теориясы элементар бөлшектер физикасында да, космологияда да сызықты емес өріс теңдеулерін шешу үшін кеңінен қолданылады. Біз қолданатын әдіс теориялық физиканың да, солитон теориясының да заманауи аппаратына сүйене отырып, космологияның негізгі сызықтық емес теңдеулерін жалпылауға мүмкіндік береді [18-20].

Әдетте, мұндай космологиялық модельдердің негізінде жатқан өріс теңдеулері екінші немесе одан жоғары ретті сызықты емес теңдеулер болып табылады, олардың аналитикалық шешімін анықтау айтарлықтай күрделі мәселе. Космологияға арналған заманауи еңбектерде мұндай мәселелерді шешудің әртүрлі тәсілдері мен әдістерін табуға болады. Осындай тәсілдердің бірі - космологияға Нетер теорема әдісін қолдану. Нетер теоремасы элементар бөлшектер физикасында кеңінен қолданылатыны белгілі, ол сақталу заңдары мен симметрия арасындағы байланысты көрсетеді. Космологияда Нетер теорема әдісін алғашқылардың бірі болып атақты Италияндық ғалымдар Сальваторе Капозциелло және Рудгиероде Ритис 1993 жылы «Physics Letters A» журналындағы «Relation between the potential and nonminimal coupled in inflationary cosmology» атты еңбегінде қолданды [21]. Нетер теоремасын қолданатын әдіс, скаляр өрісті материя ретінде қарастыратын жұмыстарда кеңінен қолданыла бастады [22]. Материялық өріс ретінде фермиондық өрістер таңдалған жұмыстарда Нетер теоремасы әдісі қолдану үлкен қызығушылық тудырды [23]. Бұл модельдердің барлығы Эйнштейннің стандартты теориясы аясында Лагранжға скалярлық немесе фермиондық өрістерді қосу арқылы анықталған. Дегенмен, жақында фермиондық өріс және гравитация арасындағы минималды емес әрекеттесуі бар телепараллель гравитациядағы космологиялық модель ұсынылды [24]. Сонымен қатар, Нетер теорема әдісін қолданып  $f(T, B)$  гравитация моделін зерттеу үлкен қызығушылыққа ие [25], ол  $f(T)$  және  $f(R)$  гравитациялық теорияларының жалпыланған түрі болып табылады [26].

Осы диссертациялық жұмыс жоғарыда айтылған мәселелерді зерттеуге негізделінген.

### **Диссертациялық жұмыстың мақсаты.**

Канондық емес лагранжиан материясы бар гравитацияның модификацияланған теорияларының шеңберінде Әлем үдемелі ұлғаю эволюциясының бірінші және екінші кезеңдерінің (фазаларының) динамикасын теориялық тұрғыда зерттеу. Қарастырылып отырған модельдер үшін заманауи аналитикалық және сандық шешу әдістерін қолданып, алынған космологиялық шешімдерді бақылау деректерімен салыстыру.

Жұмыстың мақсатына жету үшін келесідей **міндеттер** қойылды:

1. Палатини формализмін қолданып  $f(R)$  гравитациясы үшін Фридманның ұлғайып келе жатқан Әлемінің моделін құру. Қарастырылып отырған модель үшін скаляр өрісінің баяу сырғу параметрін анықтау және бақылау деректерімен салыстыру.

2. Байес информациялық критерийі бойынша квинтэссенциалды КЭ потенциалын реконструкциялау. Квинтэссенциалы КЭ мен сипатталған Әлемнің  $H(z)$  керілу мәселесін зерттеу.

3. Скаляр және фермиондық өрістері бар космологиялық модельдерде Нетер теорема әдісін қолданып анықталған космологиялық модельдердің шешімдерін бақылау деректерімен салыстыру;

### **Зерттеу нысандары.**

Әртүрлі космологиялық модельдердегі Әлемнің эволюциясы.

### **Зерттеу пәні.**

Әлем эволюциясының кезеңдерін дұрыс түсіндіретін космологиялық шешімдерді іздеу.

### **Зерттеу әдісі.**

Қарастырылған космологиялық модельдерде: вариациялау әдісі, сызықты емес дифференциалдық теңдеулерді шешу үшін айнымалыларды ажырату әдісі, Нетер теоремасын қолдану әдісі, метрикалық формализм және Палатини формализмі, сондай-ақ, сандық есептеулерде Байестік талдау әдісі қолданылған.

Диссертациялық жұмыстың **жаңалығы** мен ерекшелігі, **алғаш рет**:

1. Скаляр өрісі бар  $f(R)$  гравитация теориясын Палатини формализмін және метрикалық формализмді қолданып Әлем эволюциясының ерте (инфляциялық) кезеңінің динамикасын сипаттайтын параметрлер есептелінді. Бақылау деректерімен салыстырғанда  $f(R)$  гравитация моделі үшін Палатини формализмін қолданып табылған космологиялық параметрлер Әлем эволюциясының инфляциялық кезеңін нақты сипаттайтыны анықталды.

2. Дифференциалдық жас және бариондық акустикалық осциллятор (ВАО) әдістері арқылы анықталған мәндерді қолданып, модельден тәуелсіз КЭ-ның квинтэссенция потенциалының түрлері, Машиналық оқыту әдісін қолданып, Планк және Хаббл миссияларынан анықталған Хаббл параметрі үшін КЭ-ның квинтэссенция потенциалы реконструкцияланды.



3. Скаляр және фермиондық өрістері бар космологиялық модельдерде Нетер теорема әдісін қолданып, қарастырылып отырған модельдерден анықталған нақты космологиялық шешімдер бақылау деректермен салыстырылды.

#### **Қорғауға ұсынылған негізгі тұжырымдар:**

1. Палатини формализмі  $f(R)$  гравитация теориясында  $e - \phi$  саны  $N = 65$  болғанда, Әлем эволюциясының инфляциялық кезеңін тиімді сипаттайды.

2. Машиналық оқыту әдісін қолданып, Хаббл параметрінің  $H_0 = 67.40 \pm 0.5 \text{ км с}^{-1} \text{ Мпк}$  және  $H_0 = 73.52 \pm 1.62 \text{ км с}^{-1} \text{ Мпк}$  мәндерінде анықталған күңгірт энергияның потенциалы квинтэссенция моделіне сәйкес келеді.

3. Фермиондық өріс пен гравитациялық өріс минималды емес байланысатын  $f(T, B)$  гравитация теориясында,  $m$  параметрі: 1)  $m = -1$  болса, күй теңдеуі параметрі  $\omega = 1/3$  тең болады, бұл шешім инфляцияға дейінгі сәулелену басым болған кезеңді сипаттайды; 2)  $m > 4$  болса,  $\omega < -1$  онда фантомдық модельге сәйкес келеді; 3)  $1 < m < 3$  интервалында күй теңдеуі параметрі  $-1 < \omega < -1/3$  квинтэссенция моделін сипаттайды; 4)  $m = 3$  мәнінде  $\omega = -1$  алынған шешім күңгірт энергия моделіне сәйкес келеді.

#### **Жұмыстың теориялық және практикалық маңыздылығы.**

Диссертацияда көрсетілген әдістер нақты космологиялық модельдерді құруда және оларды бақылау деректері бойынша салыстыруға, яғни теориялық және эксперименттік космологияда қолдануға бағытталған. Сондай-ақ алынған нәтижелерді Әлемнің үдемелі ұлғаю модельдерін құруда, сонымен қатар жоғарғы оқу орындарында физика мамандығын оқытуда пайдалануға болады.

#### **Нәтижелердің сенімділігі мен негізділігі.**

Диссертациялық жұмыстың нәтижелерінің сенімділігі мен негізділігі импакт-факторы жоғары шет ел журналдарында, Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғарғы білім министрілігінің Ғылым және жоғарғы білім саласындағы сапаны қамтамасыз ету комитеті ұсынған басылымдарда және халықаралық ғылыми конференциялар материалдарында жариялымдардың бар болуымен расталады және алынған нәтижелер бақылау деректерімен сай келеді.

#### **Автордың жеке үлесі.**

Ғылыми-зерттеу жұмыстарын орындау барысында автор ғылыми жетекшілердің жетекшілігімен жұмыстың барлық кезеңдеріне тікелей қатысты: есептеулерді жүргізді, табылған шешімдердің графиктерін тұрғызды, мақалаларды дайындады.

#### **Диссертациялық жұмыстың апробациясы.**

Диссертациялық жұмыста алынған нәтижелер келесі ғылыми конференциялар мен семинарларда баяндалды:

– 15-ші Халықаралық ғылыми конференция «Marcel Grossmann Meeting» (MG15) -Рим, Италия. – 2018 ж., 1-7 шілде;

– 8-ші Халықаралық ғылыми конференция «International Conference on Mathematical Modeling in Physical Sciences» (IC-MSQUARE 2019) -Братислава, Словакия. – 2019 ж., 26-29 тамыз;

– III -ші Халықаралық ғылыми конференция «Astrophysics, Gravity and Cosmology» – Астана, Қазақстан. – 2016 ж., 30 қараша - 2 желтоқсан;

– XI Халықаралық ғылыми конференция «Ғылым және Білім – 2016» – Астана, Қазақстан. – 2016 ж., 14 сәуір;

– Халықаралық ғылыми конференциясы «Ломоносов – 2018». – Астана, Қазақстан. – 2018 ж., 20-21 сәуір.

Сонымен қатар, алынған нәтижелер Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің Жалпы және теориялық физика кафедрасында, Еуразиялық халықаралық теориялық физика орталығының семинарларында және Калифорния мемлекеттік университетінің физика кафедрасының семинарларында (Фресно қ. АҚШ) талқыланды.

### **Жарияланымдар.**

Диссертациялық жұмыс нәтижелері бойынша 20 баспа жұмысы, оның ішінде импакт-факторы жоғары шетелдік журналдарда 1 мақала; шетелдік ғылыми конференцияларында 5 мақала жарияланды және Ғылым және жоғарғы білім саласындағы сапаны қамтамасыз ету комитеті ұсынған мерзімді басылымдарда 3 мақала; ҚР-дағы халықаралық конференцияларының материалдарында 5 мақала және 3 тезис, 3 мақала ҚР-ның ғылыми басылымдарында жарияланды.

1. Bekov S., Myrzakulov K., Myrzakulov R., Gómez D.S.-C. General slow-roll inflation in  $f(R)$  gravity under the Palatini approach// Symmetry.- 2020. - Vol. 12. - P. 1–13. (Q2)

2. Myrzakulov K., Bekov S., Myrzakulov R. Some cosmological solutions of  $F(R)$  gravity with  $f$  – essence // Proceedings of the «Marcel Grossmann Meeting XV» Meeting on General Relativity, University of Rome «La Sapienza». – Italy. – 2018. ISBN 978-3-030-83714-3.

3. Myrzakulov N., Bekov S., Myrzakulov K. Cosmological model of  $f(T)$  gravity with fermion fields in (2+1) dimensions // Proceedings of the «Marcel Grossmann Meeting XV» Meeting on General Relativity, University of Rome «La Sapienza». – Italy. – 2018. ISBN 978-3-030-83714-3

4. Myrzakulov N., Bekov S., Myrzakulova S., Myrzakulov R. Cosmological model of  $f(T)$  gravity with fermion fields via Noether symmetry// Journal of Physics: Conference Series. – 2019. – Vol. 1391.

5. Myrzakulov Y., Bekov S., Myrzakulov K. Noether symmetry approach in  $f(T, B)$  teleparallel gravity with a fermionic field// Journal of Physics: Conference Series. – 2021. – Vol. 2090. – P. 12058.

6. Tsyba P., Razina O., Bekov S., Barkova Z., Myrzakulov, R. Scenario of the evolution of the universe with equation of state of the Weierstrass type gas// Journal of Physics: Conference Series. – 2019. – Vol. 1391. – P. 12162.

7. Уалиханова У.А., Сыздыкова А.М., Беков С.С. Солитонные решения

уравнения Ландау-Лифшица с одноосной анизотропией // Вестник КазНТУ имени К.И. Сатпаева. – 2015. – №6 – С. 513-520.

8. аль-Масгуди А.У., Беков С. Симметрия Нетер в  $F(T)$ - гравитации со скалярным полем и неминимальной связью // Вестник ЕНУ им. Л.Н. Гумилева. – 2016. – №2(111). – С. 315-320.

9. Уалиханова У.А., Беков С.С. Преобразование Дарбу для уравнения Ландау-Лифшица с одноосной анизотропией // Вестник ЕНУ им. Л.Н. Гумилева. – 2015г. – №107. – С. 74-79.

10. Bekov S. Anisotropic universe in modified teleparallel gravity and k-essence // Astrophysics, Gravity and Cosmology. – Астана, - 2016г. – P. 104-108.

11. Kalybai Zh., Ozat N. Bekov S. Noether symmetry in teleparallel gravity with k-essence // Astrophysics, Gravity and Cosmology. – Астана, - 2016г. – P. 114.

12. Беков С. Об одной анизотропной модели Вселенной в рамках  $F(T)$  гравитации // Наука и образование – 2016. – Астана, - 2016г. – С. 174-178.

13. Беков С. Некоторое применение теоремы Нетер в  $F(T)$ - гравитации со скалярным полем // Ломоносов – 2016. – Астана, - 2016г. – С. 27-28.

14. Myrzakulov Y., Sandal B., Bekov S. Generalized first and second laws of thermodynamics in  $F(T)$  theory of gravity with f-essences// Astrophysics, Gravity and Cosmology. – Astana, - 2016. – P. 104-108.

15. Алтаева Г., Мырзакулов К.Р Беков С. Некоторая космологическая модель расширяющейся вселенной и k -эссенции// Вестник КГУ – 2020г. – №4.

16. Беков С.С., Кудайберген Н.С., Алтайбаева А.Б. Телепараллель гравитациясы мен скалярлық-тензорлық теориясының көмегімен жазық және изотропты ғаламның эволюциясын сипаттау // Ш. Уалиханов атындағы Көкшетау университеті хабаршы . – 2023. – №1. – Б. 4-10.

17. Тастемир А.Е., Беков С. Действие и уравнения движения в  $F(T, V)$  гравитации с фермионными полями // Ломоносов – 2018. – Астана, - 2018г.

18. Тулеева А.Д., Мантиева К.А., Беков С. Ғаламның эволюциясын сигма-моделі аясында сипаттау// Наука и образование – 2016. –Астана,– С. 413.

19. Беков С. Остроконечные решения обобщенного уравнения Ландау-Лифшица // Ломоносов – 2015.– Астана, - 2015г. – С. 71-73.

20. Беков С.С., Мырзакулов К.Р. Машиналық оқытуда күнгір энергияның квинтэссенция потенциалын реконструкциялау // Ш. Уалиханов атындағы Көкшетау университеті хабаршы. – 2023. – Vol. 1. – P. 25-32

**Диссертация тақырыбының ғылыми жұмыс жоспарларымен байланысы.** Диссертациялық жұмыс мемлекеттік бюджеттен қаржыландыратын ҚР ҒЖБМ 2022-2024 жылдарға арналған «Жас Ғалым» бағдарламасы бойынша жүзеге асырылды. Жобаның тақырыбы: АР14972745 «Нетер теоремасын қолдану арқылы скаляр және фермиондық өрісті космологиялық модельдерді зерттеу».

**Диссертациялық жұмыстың құрылымы мен көлемі.** Диссертациялық жұмыс кіріспеден, 4 бөлімнен, қорытындыдан және пайдаланылған әдебиеттер тізімінен тұрады. Жұмыс 20 суреттен, 304 формуладан, 1 кестеден, 153 әдебиеттер тізімі мен 108 бетті қамтиды.

# 1 ГРАВИТАЦИЯНЫҢ МОДИФИКАЦИЯЛАНҒАН ТЕОРИЯСЫ ШЕҢБЕРІНДЕ ӘЛЕМНІҢ ҮДЕМЕЛІ ҰЛҒАЮЫНЫҢ БІРІНШІ КЕЗЕҢІ

Әлемнің эволюциясының алғашқы кезеңіндегі инфляциялық (үдемелі) ұлғаю модельдері, яғни Планк уақытына жақын уақыттағы моделдер 1970 жылдардың аяғында және негізінен 1980 жылдардың басында ұсынылды [2, p. 101]. Қазіргі уақытта, Фридман ұсынған энергия тығыздығы оң  $\rho_m > 0$  және  $p_m > 0$ ,  $\rho_m + p_m > 0$  қысымы бар қарапайым барион затымен толтырылған Әлем үшін, Эйнштейн теңдеулерінің шешімдеріне негізделген Үлкен жарылыстың стандартты теориясына модификация жасауды қажет етеді [27, 28]. Өйткені Әлем эволюциясының сценарийлерін құру кезінде Фридман шешімдері ерте кезеңдер үшін көптеген проблемаларға алып келеді.

Бұл тарауда біз Әлемнің үдемелі ұлғаюының инфляциялық моделін Палатини формализмі бойынша модификацияланған  $f(R)$  гравитациясының контекстінде зерттейміз. Мұндай инфляциялық модельдерде белгілі бір ізсіз материяның болуы қажет деп саналады, себебі, бұл қарастырылып отырған әсердегі гравитациялық жағдайлардың сызықты еместігінің салдары ретінде ғана пайда болады. Алайда, Лагранжға инфлатон рөлін атқаратын бір скаляр өрісті қосу арқылы баяу сырғу инфляциялық моделін жүзеге асыруға болады, мұнда теңдеулер Әлемнің ұлғаюының динамикасын өзгертетін тиімді потенциалға алып келеді. Бұл тарауда біз баяу сырғудың жалпы параметрлерін аламыз және Палатини формализмінде  $f(R)$  теориясындағы гравитациялық жағдайлардың айырмашылықтарын көрсету үшін қарапайым модельді талдаймыз [29].

Риман мен Риччи тензорларының скалярлық инварианттарына негізделген жалпы салыстырмалылық және басқа гравитациялық теориялар Леви-Чивита байланысы деп аталатын  $\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0$  метрикалық формализмдегі байланысты ұсынады, ал гравитациялық әсер байланыс және оның туындылары тұрғысынан құрылады. Дегенмен, екі объектіні де (байланыс, метрика), негізінен әсер деңгейіндегі тәуелсіз өрістер ретінде қарастыруға болады, екеуінен де өріс теңдеуін алу үшін вариациялық принципті қолдана отырып, қозғалыс теңдеулерін алу Палатини әдісі деп аталады. Атап айтқанда, Риччи тензоры ерікті байланыс тұрғысынан құрастырылған сызықты емес Риччи скаляр функциясын қарастырғанда, ЖСТ-сы немесе  $f(R)$  гравитацияның әдеттегі метрикалық теңдеулеріне емес, әртүрлі феноменологиясы бар басқа теңдеулерге алып келеді [30-33].

Қазіргі таңда  $f(R)$  гравитация Палатини формализмінде кеңінен талқыланған, мұндағы  $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}(\Gamma)$ , ал  $\Gamma$  тәуелсіз өріс болып табылады. Атап айтқанда, Палатини гравитациясы КЭ модельдері және Әлемнің екінші фазалы үдемелі ұлғаюына қатысты зерттелді [34, 35], мұндағы кейбір модельдер өте перспективалы, өйткені олар Әлемнің космологиялық эволюциясына бақылау нәтижелеріне сәйкес келеді және дұрыс көрсетеді [36-52]. Сондай-ақ, Палатини формализмін Борн-Инфельдтің әсері аясында зерттеулер кең таралған [53].

Олардан қара құрдымға [54-56], крот ініне [57, 58] қатысты шешімдер алынған. Сонымен қатар, Палатини формализміндегі  $f(R)$  гравитациясында скаляр-тензорлық модификациясы және оның Джордан мен Эйнштейн контекстіндегі талдауы да бұрын зерттелген [59].

Екінші жағынан, Үлкен жарылыс моделінің кейбір маңызды теориялық мәселелерін шешетін инфляциялық парадигма әлі де терең талдау сатысында және көптеген модельдер Әлемнің осындай бастапқы супер жылдамдықты фазасын қайталайды [60-62]. Сонымен қатар, инфляция материяның таралуына галактикалар мен галактика кластерлері, сондай-ақ ғарыштық микротолқынды фон анизотропиясын қалыптастыруда қажетті ауытқуларды тудырады [63-65]. Инфляциялық модельдердің көпшілігі скалярлық өрістер бойынша сәйкес потенциалмен құрастырылған, әдетте инфляцияның басында экспоненциалды ұлғаюға әкелетін скалярлық өрістің баяу сырғу әрекетін қамтамасыз етеді, содан кейін өріс әсері кемиді, бұл инфляцияның соңында қайта қыздыру режиміне алып келеді [66, 67]. Бұл модельдер соңғы бірнеше жыл ішінде Планк миссиясы жинаған мәліметтерді талдау нәтижесінде туындайтын шектеулерді қанағаттандыра алатындай етіп құрастырылған [68, 69]. Дегенмен, инфляция басқа негізгі теорияларда да жақсы зерттелген, мысалы,  $f(R)$  гравитация теориясы [70-73],  $R^2$  немесе Старобинский теориясы [74-77] бақылау деректерімен салыстырғанда ең жақсы сәйкестіктердің бірін көрсетеді.

Палатини формализмі бойынша  $f(R)$  гравитациядағы баяу сырғу инфляциясын көрсетеміз. Инфляция – бұл Палатини формализмі контекстінде әдебиетте кеңінен талданған сценарий [78-97]. Атап айтқанда, Палатини формализмі шеңберінде инфлатонның қарапайым потенциалы немесе квадраттық потенциал ретінде Эйнштейн-Гильберт әсерінің модификациясымен бірге қарастырылады [81, р. 223; 82, р. 104020, 83, р. 014-1-014-20; 84, р. 33-5], бұл жалпы потенциалы бар жалғыз инфлатондық модельдерге қарағанда Планк деректерімен жақсы сәйкестігін көрсетті. Сонымен қатар, метрикалық формализм үшін Старобинскийдің  $f(R)$  гравитациядағы моделін кеңейтуге ерекше назар аударылды, мұнда гравитациялық терминдерден басқа, инфлатонның скаляр өріс әсері қарастырылады және оның өзгертілген қасиеттері Эйнштейннің теориясы шеңберінде талданады [85; 86, р. 083513; 87, р. 029-7; 88, р. 29; 89, р. 5-7; 90, р. 28, 91, р. 22; 92, р. 18; 93, р. 406; 94, р. 29; 95; 96, р. 18; 97, р. 42; 98-104].

Палатини формализмінде скаляр өріс болғанда  $f(R)$  гравитациясының әсерінен баяу сырғу параметрінің жалпы шарттын алуға тырысамыз, мұнда скаляр өріс инфляцияның баяу сырғу рөлін атқарады, яғни оның кинетикалық мүшесі инфляцияның басындағы потенциалдық энергиямен салыстырғанда өте аз. Бұл талдау Джордан санақ жүйесінде толығымен орындалады, онда біз әсердің гравитациялық бөлігімен байланысты көмекші скаляр өрістің болатынын анықтаймыз, ол таралмайды және инфлатон потенциалына модификация жасайды, нәтижесінде баяу сырғу, спектрлік индекс және тензордың скалярға қатынасын өзгертетін тиімді потенциал пайда болады.

Сондай-ақ инфлатонның квадраттық потенциалын және Палатини формализмі мен ЖСТ-ның айырмашылықтарын көрсету үшін белгілі бір әсердің формасын қарастырамыз.

Осы диссертрациялық жұмыста қарастырылған  $i, j, k, \mu, \nu, \lambda$  және де басқа индекстер нольден үшке дейінгі мәндерді қабылдайды.

### 1.1 Формализм негіздері

Алдымен формализм түрлері туралы қысқаша тоқталсақ. Стандартты метрикалық формализімде кеңістік-уақытты сипаттайтын жалғыз еркіндік дәрежесі  $g_{\mu\nu}$  метрикасы болып табылады және байланыс пен метрика үйлесімді  $\overset{\circ}{\nabla}_\sigma g^{\mu\nu} = 0$  (параллель тасымалдау метриканы сақтайды) және ширату болмайды  $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \Gamma_{\nu\mu}^\sigma$ . Осылайша, байланыс коэффициенттері

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = g^{\sigma\rho} (\mu g_{\nu\rho} + \nu g_{\rho\mu} - \rho g_{\mu\nu}),$$

өрнегімен анықталады.

Формализм тек метрикаға және оның туындыларына тәуелді функционал болып табылатын  $L$  Лагранж тығыздығын анықтаумен жалғасады:  $L = L(g_{\mu\nu}, g_{\mu\nu}, g_{\mu\nu}, \dots)$ . Лагранж функциясы Лоренц инвариантты болуы керек, басқа математикалық немесе физикалық шектеулер де қойылуы мүмкін. Әсер интегралы инвариантты кеңістік-уақыт көлемі элементіне қатысты жинақы кеңістік-уақыт бойынша біріктірілген лагранжиан болып табылады  $\sqrt{-g} d^n x$ . Әсер келесідей

$$S[g_{\mu\nu}] = \int_\Sigma d^n x \sqrt{-g} L \quad (1.1)$$

мұнда классикалық вариациялық принцип қолданылады: метрикаға қатысты әсердің ерікті вариациясы нөлге айналады және интеграл шекарасындағы вариацияның жойылуы талап етіледі. Басқаша айтқанда, метрикаға қатысты  $L$  Лагранж функционалды туындысы жойылады

$$\frac{\delta L}{\delta g^{\mu\nu}} = 0.$$

Эйнштейн өрісінің теңдеулеріне алып келетін метрика мен оның туындыларынан ғана тұратын ең қарапайым лагранжиан ол Риччи скаляры. Бұл Эйнштейн-Гильберт әсерін береді:

$$S_{EH} = \frac{1}{2} \int d^4 x \sqrt{-g} R, \quad (1.2)$$

мұнда  $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}^{\lambda}$  Риччи скаляры. Бұл әсердің вариациясы вакуумдағы Эйнштейн өріс тендеулеріне алып келеді. Әсерге  $\Lambda$  космологиялық тұрақты мен  $L_M$  материяны қосуға болады. Материаның метрикалық тензор бойынша вариациясы энергия-импульстік тензорды береді:

$$T_{\mu\nu} = \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (1.3)$$

мұндағы  $S_M$  әсердің материяға жауапты бөлігі. Бұл космологиялық тұрақты және бастапқы термині бар Эйнштейн өріс тендеулеріне сай келеді:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}. \quad (1.4)$$

Алайда, қорытындыда шекара мүшелеріне қатысты шағын ескертулер бар. Әр түрлі формализдерді қарастырған кезінде шекараларды ескеру пайдалы, өйткені алынған шекаралық шарттар әр түрлі болуы мүмкін.

### 1.1.1 Метрикалық формализмдегі Эйнштейн-Гильберт әсері

Эйнштейн-Гильберт әсерінің вариациясын қысқаша қарастырамыз. Кері метрикаға қатысты  $\sqrt{-g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$  вариацияны алуымыз керек. Ол үшін бірнеше пайдалы тепе-теңдікті қолданамыз, атап айтқанда:

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \quad (1.5)$$

және бұл жағдайда қарастыратын Палатини тепе-теңдігі

$$\delta R_{\mu\nu}^{\rho} = \nabla_{\lambda} \delta \Gamma_{\nu\mu}^{\rho} - \nabla_{\nu} \delta \Gamma_{\lambda\mu}^{\rho}, \quad (1.6)$$

бірінші кезекте бізде:

$$\delta(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}) = \sqrt{-g} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + R \delta\sqrt{-g} + \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}. \quad (1.7)$$

Байланыс теңдеуін қолданып

$$\delta \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left[ g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \nabla^{\sigma} \delta g^{\alpha\beta} - g_{\alpha\mu} \nabla_{\nu} \delta g^{\alpha\sigma} - g_{\alpha\nu} \nabla_{\mu} \delta g^{\alpha\sigma} \right] \quad (1.8)$$

Палатини (1.6) тепе-теңдігін (1.8) теңдеуіне қолдансақ, бірінші және үшінші индекс жойылады, Риччи тензорының вариациясын аламыз, бізде

$$g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \nabla_\lambda [g_{\mu\nu} \nabla^\lambda \delta g^{\mu\nu} - \nabla_\alpha \delta g^{\alpha\lambda}]$$

Сонда әсерді келесідей түрде аламыз

$$S = \int d^4 x \sqrt{-g} \left[ R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right] \delta g^{\mu\nu} + \int d^4 x \nabla_\lambda [g_{\mu\nu} \nabla^\lambda \delta g^{\mu\nu} - \nabla_\alpha \delta g^{\alpha\lambda}] \quad (1.9)$$

Осы теңдеуден көретініміз бірінші мүшесі вакуумдағы Эйнштейн теңдеулеріне тең екенін бірден көруге болады, ал екінші мүшесі біз қарастыратын шекара мүшесі болып табылады.

#### *Палатини формализмі*

Палатини формализмінде метрика мен байланыс тәуелсіз еркіндік дәрежесі ретінде қарастырылады. Осылайша, кеңістік-уақытқа байланысты түрленген симметриялы Лоренц метрикасын  $g_{\mu\nu}$  және жалпыланған байланыс пайда болады, Палатини формализмінде метрикалық үйлесімділік сақталмайды  $\nabla_\sigma g_{\mu\nu} \neq 0$  және ширату тензоры міндетті түрде жойылмайды  $T_{\mu\nu}^\sigma \neq 0$ .

Енді Лагранж функциясын құрумен жалғастырамыз, ол метриkanың және де байланыс пен олардың туындыларының да функционалы болып табылады  $L = L(g, \delta g, \delta\delta g, \dots, \Gamma, \delta\Gamma, \delta\delta\Gamma, \dots)$ . Әсерді келесідей жазамыз:

$$S[g_{\mu\nu}, \Gamma_{\mu\nu}^\sigma] = \int_\Sigma d^n x \sqrt{-g} L. \quad (1.10)$$

Әрі қарай, біз классикалық вариация принципін қолданамыз: метрика мен байланысты бөлек вариациялармен қарастырамыз. Бұл теңдеулер метрика үшін де, байланыс үшін де қозғалыс теңдеулерін береді. Әсердің вариациясы нөлге айналады:

$$\frac{\delta L}{\delta g^{\mu\nu}} = 0, \quad \frac{\delta L}{\delta \Gamma_{\mu\nu}^\sigma} = 0. \quad (1.11)$$

Палатини тұжырымдамасының ерекшелігі мынада: Эйнштейн-Гильберт жағдайында байланыс үшін қозғалыс теңдеуі Леви-Чивита байланысын талап етеді және осылайша біз псевдориман кеңістігін Эйнштейн теңдеулерімен алдын-ала болжамсыз қалпына келтіреміз. Сонымен қатар, әсерге Йорк-Гиббонс-Хокингтің шекаралық шарттарын енгізудің қажеті жоқ.

#### 1.1.2 Палатини формализміндегі Эйнштейн-Гильберт әсері

Тек байланыстан (және тензорлардан алынған туынды) жасалған Риман тензоры  $R_{\mu\sigma\nu}^\rho$  қарастырамыз. Жалпы байланыс кезінде Риман тензоры Леви-Чивита байланысы сияқты симметрияның барлық қасиеттеріне ие емес. Тек соңғы екі индекстің антисимметриясы қасиеті ғана қалады.



$$R_{\mu\nu} = R^{\lambda}_{\mu\lambda\nu},$$

ол жалпы жағдайда асимметриялы. Риччи псевдотензорын келесідей анықтаймыз

$$\hat{R}^{\mu}_{\nu} = g^{\lambda\sigma} R^{\mu}_{\sigma\nu\lambda},$$

псевдотензор симметрия қасиеттеріне ие емес. Риччидің антисимметриялық тензорын келесі түрде қарастырамыз

$$R'_{\mu\nu} = R^{\lambda}_{\lambda\mu\nu},$$

оны кейде гомотетикалық қисықтық деп те атайды және ол Риман тензорының анықтамасынан антисимметриялы болады. Метрикалық тензор симметриялы болғандықтан,  $g^{\mu\nu} R'_{\mu\nu} = 0$ , ізі нөлге айналады және

$$\hat{R}^{\mu}_{\mu} = g^{\lambda\sigma} R^{\mu}_{\sigma\lambda} = g^{\lambda\sigma} R_{\lambda\sigma} = R,$$

онда әсер келесі түрде жазылады

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}(\Gamma). \quad (1.12)$$

Метрикаға қатысты вариация өте қарапайым, өйткені Риччи тензорының вариациясы нөлге тең:

$$\delta(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}(\Gamma)) = \delta\sqrt{-g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}(\Gamma) + \sqrt{-g} \delta(g^{\mu\nu}) R_{\mu\nu}(\Gamma). \quad (1.13)$$

Егер вариацияны метрикаға қолдансақ  $\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = 0$ , онда

$$R_{(\mu\nu)} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0. \quad (1.14)$$

Мұнда ешқандай шекаралық шарттар болмағанын ескереміз.

Байланысқа тәуелді жалғыз объекті Риччи тензоры. Риччи тензорының вариациясы  $\delta R_{\mu\nu}$  оның компоненттеріне қатысты алынады. Ол үшін Палатинидің жалпы тепе-теңдігін қолданамыз

$$\delta R^{\rho}_{\mu\lambda\nu} = \nabla_{\lambda} \delta \Gamma^{\rho}_{\nu\mu} - \nabla_{\nu} \delta \Gamma^{\rho}_{\lambda\mu} + T^{\sigma}_{\lambda\nu} \delta \Gamma^{\rho}_{\sigma\mu}. \quad (1.15)$$

Сонымен, Палатинидің тепе-теңдігін дәлелдейтін боламыз. Ол үшін Риман тензоры анықтаудан бастаймыз және байланыс бойынша вариацияны аламыз

$$\delta R_{\mu\lambda\nu}^{\rho} = \partial_{\lambda} \delta \Gamma_{\nu\mu}^{\rho} + \Gamma_{\lambda\sigma}^{\rho} \delta \Gamma_{\nu\mu}^{\sigma} + \delta \Gamma_{\lambda\sigma}^{\rho} \Gamma_{\nu\mu}^{\sigma} - (\lambda \leftrightarrow \nu). \quad (1.16)$$

Егер де  $\delta \Gamma_{\nu\mu}^{\rho}$  тензор екенін ескеріп, сондықтан ковариантты туынды анықталады

$$\nabla_{\lambda} (\delta \Gamma_{\nu\mu}^{\rho}) = \partial_{\lambda} \delta \Gamma_{\nu\mu}^{\rho} + \Gamma_{\lambda\sigma}^{\rho} \delta \Gamma_{\nu\mu}^{\sigma} - \Gamma_{\lambda\nu}^{\sigma} \delta \Gamma_{\sigma\mu}^{\rho} - \Gamma_{\lambda\mu}^{\sigma} \delta \Gamma_{\nu\sigma}^{\rho}. \quad (1.17)$$

Шарттар бойынша жинақтаймыз

$$\delta R_{\mu\lambda\nu}^{\rho} = \left[ \partial_{\lambda} \delta \Gamma_{\nu\mu}^{\rho} + \Gamma_{\lambda\sigma}^{\rho} \delta \Gamma_{\nu\mu}^{\sigma} - \Gamma_{\lambda\mu}^{\sigma} \delta \Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} \right] - \left[ \partial_{\nu} \delta \Gamma_{\lambda\mu}^{\rho} + \Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} \delta \Gamma_{\lambda\mu}^{\sigma} - \Gamma_{\nu\mu}^{\sigma} \delta \Gamma_{\lambda\sigma}^{\rho} \right]$$

Жақшадағы мүшелер байланыстың вариациясының ковариантты туындысына дерлік тең екенін ескеріп, біз жетіспейтін мүшелерді қосу және азайту арқылы оларды теңестіріп аламыз

$$\begin{aligned} \delta R_{\mu\lambda\nu}^{\rho} &= \left[ \partial_{\lambda} \delta \Gamma_{\nu\mu}^{\rho} + \Gamma_{\lambda\sigma}^{\rho} \delta \Gamma_{\nu\mu}^{\sigma} - \Gamma_{\lambda\mu}^{\sigma} \delta \Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} - \Gamma_{\lambda\nu}^{\sigma} \delta \Gamma_{\sigma\mu}^{\rho} \right] \\ &\quad - \left[ \partial_{\nu} \delta \Gamma_{\lambda\mu}^{\rho} + \Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} \delta \Gamma_{\lambda\mu}^{\sigma} - \Gamma_{\nu\mu}^{\sigma} \delta \Gamma_{\lambda\sigma}^{\rho} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\sigma} \delta \Gamma_{\sigma\mu}^{\rho} \right] + T_{\lambda\nu}^{\sigma} \delta \Gamma_{\sigma\mu}^{\rho} \end{aligned} \quad (1.18)$$

немесе келесі түрде жаза аламыз

$$\delta R_{\mu\lambda\nu}^{\rho} = \nabla_{\lambda} (\delta \Gamma_{\nu\mu}^{\rho}) - \nabla_{\nu} (\delta \Gamma_{\lambda\mu}^{\rho}) + T_{\lambda\nu}^{\sigma} \delta \Gamma_{\sigma\mu}^{\rho}. \quad (1.19)$$

Бірінші және үшінші индексті қысқартып, әсердің вариациясының  $\delta R_{\mu\nu}$  өзгерісін келесідей жазамыз

$$\delta S = \int d^4 x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \left( \nabla_{\lambda} \delta \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} - \nabla_{\nu} \delta \Gamma_{\lambda\mu}^{\lambda} + T_{\lambda\nu}^{\sigma} \delta \Gamma_{\sigma\mu}^{\lambda} \right). \quad (1.20)$$

Жақша ішіндегі бірінші және үшінші мүшелерін тағыда жіктеп жазуға болады. Енді (1.20) теңдеуінің бірінші мүшесі қалай түрленетінін көрейк (басқа мүшелеріде солай түрленеді):

$$\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \nabla_{\lambda} \delta \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} = \nabla_{\lambda} \left( \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} \right) - \nabla_{\lambda} \left( \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \right) \delta \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}. \quad (1.21)$$

Теңдеудің оң жағындағы бірінші мүше беттік мүшеге ұқсайды. Бірақ оны Стокс теоремасы арқылы беткі мүшеге айналдырып жазамыз, өйткені бұл тек Леви-Чивита байланысы үшін жарамды. Сол себепті айнымалыларды алмастыру әдісін қолданамыз және біздің жалпы байланысымызды келесідей жазамыз

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} + C_{\mu\nu}^{\sigma}, \quad (1.22)$$

мұнда  $\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}$  Леви–Чивита байланысы, ал  $C_{\mu\nu}^{\sigma}$  тензоры оның айырмашылығы. Сондай-ақ (1.21) теңдеудің оң жағындағы екінші мүшесі салмақтың +1 тензорлық тығыздығына әсер ететін коварианттық туынды болып табылады, біз оны теңдеудің қажетті түрін алу үшін ескереміз. Ол үшін бізге скаляр тығыздықтың ковариантты туындысы қажет, ол скаляр тығыздықтың жалпы көрінісі

$$\nabla_{\mu}\rho = \partial_{\mu}\rho - \omega\Gamma_{\mu\sigma}^{\sigma}\rho. \quad (1.23)$$

Қысқартулардың (1.23) байланыс коэффициенттерінен алынғаны маңызды екенін ескеріп және бұл ковариантты туындыға байланысты келесі өрнекті жазамыз

$$\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\nabla_{\lambda}\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} = \sqrt{-g}\nabla_{\lambda}(g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}) + g^{\mu\nu}(\nabla_{\lambda}\sqrt{-g})\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \nabla_{\lambda}(\sqrt{-g}g^{\mu\nu})\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}. \quad (1.24)$$

Айнымалыларды алмастыру арқылы (1.22) теңдеуін келесідей жазамыз

$$\begin{aligned} \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\nabla_{\lambda}\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} &= \sqrt{-g}\nabla_{\lambda}(g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}) + \sqrt{-g}C_{\lambda\sigma}^{\lambda}g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} + \\ &+ g^{\mu\nu}[\nabla_{\lambda}\sqrt{-g} - C_{\lambda\sigma}^{\sigma}]\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \nabla_{\lambda}(\sqrt{-g}g^{\mu\nu})\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Стокс теоремасын қолданып (1.25) теңдеудегі бірінші мүшесін жоямыз.  $C_{\mu\nu}^{\sigma}$  тензорларын комбинациялап, ширату тензорын қолданып  $C_{\lambda\sigma}^{\lambda} - C_{\sigma\lambda}^{\lambda} = T_{\lambda\sigma}^{\lambda}$ , келесі теңдікті  $\nabla_{\lambda}\sqrt{-g} = 0$  аламыз. Онда (1.25) теңдеуді келесідей жазамыз

$$\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\nabla_{\lambda}\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} = [\sqrt{-g}g^{\mu\nu}T_{\lambda\sigma}^{\lambda} - \nabla_{\sigma}(\sqrt{-g}g^{\mu\nu})]\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}, \quad (1.26)$$

Сол сияқты (1.21) теңдеудің екінші мүшесі үшін осы амалдарды қолданамыз, байланыс үшін қозғалыс теңдеулері келесідей алынады

$$\nabla_{\lambda}(\sqrt{-g}g^{\nu\lambda})\delta_{\sigma}^{\mu} - \nabla_{\sigma}(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}) + \sqrt{-g}[g^{\mu\nu}T_{\lambda\sigma}^{\lambda} - g^{\nu\lambda}T_{\rho\lambda}^{\rho}\delta_{\sigma}^{\mu} + g^{\nu\lambda}T_{\sigma\lambda}^{\mu}] = 0 \quad (1.27)$$

Симметриялы байланыс болатын жағдайды қарастырғанда, алынған (1.27) теңдеуді айтарлықтай жеңілдетеді, өйткені ширату тензоры жойылады және жоғарғы индекстерінің симметриялық бөлігі ғана үлес қосады, сондықтан бізде

$$\nabla_{\lambda}(\sqrt{-g}g^{\lambda(\nu)})\delta_{\sigma}^{\mu)} - \nabla_{\sigma}(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}) = 0. \quad (1.28)$$

Егер  $\mu$  және  $\sigma$  индекстері бойынша ізін алсақ, онда

$$\nabla_{\sigma}(\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) = 0. \quad (1.29)$$

Бұл өрнек метриканың үйлесімділік шартына эквиваленті. Осылайша, егер біз бастапқыда симметриялы байланысты алсақ, ол динамикалық түрде Ливичивита байланысына айналады. Йорк-Гиббонс-Хокингтің шекаралық шарттарын енгізбей-ақ, метрикаға арналған қозғалыс теңдеулерінен Эйнштейн өріс теңдеулеріне тең болатыны шығады.

## 1.2 Палатини формализміндегі $f(R)$ гравитациясының негіздері

Палатини формализмі бойынша  $f(R)$  теориясының әсері келесідей

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} f(R) + S_m[g_{\mu\nu}, \psi], \quad (1.30)$$

мұнда  $S_m$  материяның әсері,  $\psi$  материялық өрістердің жиынтығы, ал  $\kappa^2$  сәйкес өлшемді тұрақты (мұндағы  $f(R) = R$ , онда  $\kappa^2 = 8\pi G$ ),

$$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} = \partial_{\mu} \Gamma_{\nu\beta}^{\alpha} - \partial_{\nu} \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\alpha} \Gamma_{\nu\beta}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\alpha} \Gamma_{\mu\beta}^{\lambda},$$

$$R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

және  $R_{\mu\nu} \equiv R^{\rho}{}_{\mu\rho\nu}$  Риман тензорының компоненті, байланыс өрісінің кернеулігі. Байланыс динамикалық түрде анықталғандықтан, оның төменгі индекстерінде априорлық симметрияның болжай алмайтынын ескеру қажет. Ол дегеніміз өріс теңдеулерін алу кезінде  $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} \neq \Gamma_{\gamma\beta}^{\alpha}$  екенін есте сақтау керек дегенді білдіреді. Метрикалық тензор симметриялы деп есептейміз  $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ . Метрикаға және байланысқа қатысты (1.30) әсердің өзгеруін келесідей жазуға болады

$$\delta S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \left( f_R R_{(\mu\nu)} - \frac{f}{2} g_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} + f_R g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \right] + \delta S_m, \quad (1.31)$$

мұнда  $f_R \equiv \frac{\partial f}{\partial R}$  және  $R_{(\mu\nu)}$  симметриялық бөлігін көрсетеді. Тікелей манипуляциялар  $\delta R_{\mu\nu}$  Риччи тензорының вариациясы келесідей жазуға болатындығын көрсетеді.

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_{\lambda} (\delta \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}) - \nabla_{\nu} (\delta \Gamma_{\lambda\mu}^{\lambda}) + 2S_{\rho\nu}^{\lambda} \delta \Gamma_{\lambda\mu}^{\rho}, \quad (1.32)$$

мұндағы  $2S_{\rho\nu}^{\lambda} \equiv \Gamma_{\rho\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\rho}^{\lambda}$  ширату тензоры, ол байланыстың антисимметриялық бөлігін білдіреді. Өрнектің үлесі  $\delta R_{\mu\nu}$ ,

$$I = \int d^4 x \sqrt{-g} f_R g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu},$$

келесі теңдеуге алып келеді

$$I = \int d^4 x \left\{ \nabla_{\lambda} (\sqrt{-g} J^{\lambda}) + \delta \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} \left[ -\nabla_{\lambda} (\sqrt{-g} f_R g^{\mu\nu}) + \nabla_{\rho} (\sqrt{-g} f_R g^{\mu\rho}) + 2\sqrt{-g} f_R g^{\mu\sigma} S_{\lambda\sigma}^{\nu} \right] \right\}, \quad (1.33)$$

мұндағы  $J^{\lambda} \equiv f_R (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - g^{\mu\lambda} \delta \Gamma_{\alpha\mu}^{\sigma})$ , осыны ескеріп

$$\nabla_{\mu} \sqrt{-g} = \partial_{\mu} \sqrt{-g} - \Gamma_{\mu\sigma}^{\sigma} \sqrt{-g},$$

келесі шешімді аламыз

$$\nabla_{\lambda} (\sqrt{-g} J^{\lambda}) = \partial_{\lambda} (\sqrt{-g} J^{\lambda}) + \sqrt{-g} f_R [g^{\mu\nu} S_{\alpha\lambda}^{\sigma} - \delta_{\lambda}^{\nu} g^{\mu\rho} S_{\sigma\rho}^{\sigma}] \delta \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}. \quad (1.34)$$

Осы нәтижені (1.33) өрнегінің орнына қойып, беттік мүшесі  $\int d^4 x \partial_{\lambda} (\sqrt{-g} J^{\lambda})$  шекараларында жойылады деп есептесек, соңында өріс теңдеулерін келесідей жазуға болады.

$$f_R R_{(\mu\nu)} - \frac{f}{2} g_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu} \quad (1.35)$$

$$-\nabla_{\lambda} (\sqrt{-g} f_R g^{\mu\nu}) + \delta_{\lambda}^{\nu} \nabla_{\rho} (\sqrt{-g} f_R g^{\mu\rho}) + 2\sqrt{-g} f_R (g^{\mu\nu} S_{\alpha\lambda}^{\sigma} - \delta_{\lambda}^{\nu} g^{\mu\rho} S_{\sigma\rho}^{\sigma} + g^{\mu\sigma} S_{\lambda\sigma}^{\nu}) = H_{\lambda}^{\nu\mu} \quad (1.36)$$

мұндағы  $T_{\mu\nu} \equiv -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{S}_m}{\delta g^{\mu\nu}}$ , және  $H_{\lambda}^{\nu\mu} \equiv -\frac{\delta \mathcal{S}_m}{\delta \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}} = 0$  өйткені бұл байланысқа

катысты емес деп есептелінеді. Соңында (1.36) теңдеуі қарапайым түрге айналатын қисаю тензоры  $S_{\lambda\sigma}^{\nu} = 0$  болмауы шартын ескере отырып

$$\nabla_{\lambda} (\sqrt{-g} f_R g^{\mu\nu}) = 0. \quad (1.37)$$

Дегенмен, аздап қосымша күш жұмсау арқылы қисаю тензорының рөлі мен қасиеттерін тереңірек түсінеміз және қисаю тензорына ешқандай шектеулер

қоймай (1.37) теңдеуге ұқсас өрнекті алуға болатынын көреміз. Ең алдымен  $\nu$  және  $\lambda$  индекстерін біріктіру үшін (1.36) теңдеуін қайта қарастырамыз

$$3\nabla_{\rho}(\sqrt{-g}f_Rg^{\mu\rho})=4\sqrt{-g}f_Rg^{\mu\rho}S_{\varphi}^{\sigma}.$$

Сондықтан төмендегі нәтижені алу үшін (1.36) теңдеуін қолданамыз

$$-\nabla_{\lambda}(\sqrt{-g}f_Rg^{\mu\nu})+2\sqrt{-g}f_R\left(g^{\mu\nu}S_{\alpha\lambda}^{\sigma}-\frac{\delta_{\lambda}^{\nu}}{3}g^{\mu\rho}S_{\varphi}^{\sigma}+g^{\mu\sigma}S_{\lambda\sigma}^{\nu}\right)=0 \quad (1.38)$$

Енді байланысты симметриялы және антисимметриялы бөліктерге бөліп, сәйкесінше  $C_{\mu\nu}^{\lambda}$  және  $S_{\mu\nu}^{\lambda}$  белгілеп,  $\nabla_{\lambda}(\sqrt{-g}f_Rg^{\mu\nu})$  түрінде қайта өрнектейміз.

$$\nabla_{\lambda}(\sqrt{-g}f_Rg^{\mu\nu})=\nabla_{\lambda}^C(\sqrt{-g}f_Rg^{\mu\nu})+\sqrt{-g}f_R[g^{\mu\sigma}S_{\lambda\sigma}^{\nu}+g^{\nu\sigma}S_{\lambda\sigma}^{\mu}+g^{\mu\nu}S_{\alpha\lambda}^{\sigma}], \quad (1.39)$$

мұндағы  $\nabla_{\lambda}^C(\sqrt{-g}f_Rg^{\mu\nu})$  байланыстың симметриялы бөлігіне жауапты, ол  $\nabla_{\lambda}^CA_{\mu}=\partial_{\lambda}A_{\mu}-C_{\lambda\mu}^{\rho}A_{\rho}$  тең екенін пайдаланып, осы нәтижені (1.38) теңдеуге қолданып, келесі өрнекті аламыз

$$\nabla_{\lambda}^C(\sqrt{-g}f_Rg^{\mu\nu})=\sqrt{-g}f_R\left(g^{\mu\sigma}S_{\lambda\sigma}^{\nu}-g^{\nu\sigma}S_{\lambda\sigma}^{\mu}+g^{\mu\nu}S_{\alpha\lambda}^{\sigma}-\frac{2}{3}\delta_{\lambda}^{\nu}g^{\mu\rho}S_{\varphi}^{\sigma}\right). \quad (1.40)$$

Осы теңдеуге бірдей өрнекті қосып және азайтып, бірақ  $\mu$  және  $\nu$  индекстерінің ретін өзгертіп, келесі қатынасты табамыз

$$\nabla_{\lambda}^C(\sqrt{-g}f_Rg^{\mu\nu})=\sqrt{-g}f_R\left(g^{\mu\sigma}S_{\lambda\sigma}^{\nu}-\frac{1}{3}(\delta_{\lambda}^{\nu}g^{\mu\rho}+\delta_{\lambda}^{\mu}g^{\nu\rho})S_{\varphi}^{\sigma}\right). \quad (1.41)$$

$$g^{\mu\sigma}S_{\lambda\sigma}^{\nu}-g^{\nu\sigma}S_{\lambda\sigma}^{\mu}=\left(\frac{1}{3}(\delta_{\lambda}^{\nu}g^{\mu\rho}+\delta_{\lambda}^{\mu}g^{\nu\rho})S_{\varphi}^{\sigma}\right). \quad (1.42)$$

Бұл өрнектер арқылы байланыстың симметриялық бөлігі  $S_{\varphi}^{\sigma}$  қисаю тензоры арқылы антисимметриялық бөлікке қатысты екені анық. Бұл қисаю тензоры теңдеуінің (1.42) оң жақ бөлігінің де негізі болып табылады. Бұл факт (1.41) және (1.42) теңдеулерін жеңілдетуге бағытталған жаңа қадамды болжайды. Жаңа айнымалыларды қарастырып

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda}=\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}+\alpha\delta_{\nu}^{\lambda}S_{\alpha\mu}^{\sigma}, \quad (1.43)$$

егер параметр  $\alpha = 2/3$  болса, онда  $\tilde{S}_{\mu\nu}^{\lambda} \equiv \tilde{\Gamma}_{[\mu\nu]}^{\lambda}$  және  $\tilde{S}_{\sigma\nu}^{\sigma} = 0$ . Симметриялы  $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$  және антисимметриялы  $\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda}$  бөліктерінің байланысы

$$\tilde{C}_{\mu\nu}^{\lambda} = C_{\mu\nu}^{\lambda} + \frac{1}{3}(\delta_{\nu}^{\lambda} S_{\sigma\mu}^{\sigma} + \delta_{\mu}^{\lambda} S_{\sigma\nu}^{\sigma}). \quad (1.44)$$

$$\tilde{S}_{\mu\nu}^{\lambda} = S_{\mu\nu}^{\lambda} + \frac{1}{3}(\delta_{\nu}^{\lambda} S_{\sigma\mu}^{\sigma} - \delta_{\mu}^{\lambda} S_{\sigma\nu}^{\sigma}). \quad (1.45)$$

Осы жаңа айнымалыларды ескеріп (1.41) және (1.42) теңдеулерді қайта жазу арқылы келесі теңдеуді табамыз

$$\nabla_{\lambda}^C (\sqrt{-g} f_R g^{\mu\nu}) = 0. \quad (1.46)$$

$$g^{\mu\sigma} \tilde{S}_{\lambda\sigma}^{\nu} - g^{\nu\sigma} \tilde{S}_{\lambda\sigma}^{\mu} = 0. \quad (1.47)$$

Жоғарыдағы (1.46) теңдеу мынаны білдіреді:  $\tilde{S}_{\beta\lambda\alpha} = \tilde{S}_{\alpha\lambda\beta}$  мұндағы  $g_{\beta\nu} \tilde{S}_{\lambda\alpha}^{\nu} \equiv \tilde{S}_{\beta\lambda\alpha}$  соңғы екі индексте қисаю тензоры антисимметриялық болғандықтан, бірінші және үшінші индекстердің симметриясынан автоматты түрде шығады, сонда  $\tilde{S}_{\beta\lambda\alpha} = 0 \Leftrightarrow \tilde{S}_{\lambda\alpha}^{\nu} = 0$ . Бұл нәтижені (1.45) өрнегіне қолданып:

$$S_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{3}(\delta_{\mu}^{\lambda} S_{\sigma\nu}^{\sigma} - \delta_{\nu}^{\lambda} S_{\sigma\mu}^{\sigma}). \quad (1.48)$$

Алынған (1.48) теңдеуі қисаю тензоры векторынан құрылғанын көрсетеді  $A_{\mu} \equiv S_{\sigma\mu}^{\sigma}$ , оның маңызды салдары бар және оны шешу пайдалы болады. Келесідей түрлендіру аламыз:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \tilde{C}_{\mu\nu}^{\alpha} - \frac{2}{3} A_{\mu} \delta_{\nu}^{\alpha} \quad (1.49)$$

егер,  $R_{\beta\mu\nu}^{\alpha}(\Gamma) = R_{\beta\mu\nu}^{\alpha}(\tilde{C}) - \frac{4}{3} \partial_{[\mu} A_{\nu]} \delta_{\beta}^{\alpha}$ , деп есептесек, онда біз келесі өрнекті табамыз

$$R_{\mu\nu}(\Gamma) \equiv R_{\mu\alpha\nu}^{\alpha}(\Gamma) = R_{\mu\nu}(\tilde{C}) - \frac{4}{3} \partial_{[\mu} A_{\nu]}.$$

Егер де Риччи тензорының симметриялы екенін ескерсек, (1.35) формула  $R_{(\mu\nu)}(\Gamma) = R_{(\mu\nu)}(\tilde{C})$  теңдеуіне тең екенін білдіреді. Бұдан шығатыны, ширату

шамасының  $R(\Gamma) = R(\tilde{C})$  түрінде болуынан да байланысты емес екені анық. Бұл қасиет скалярлық қисықтықтың проекциялық инварианты ретінде белгілі. Онда (1.46) теңдеуінде екінші ретті туындыларды қамтитын болса, оны (1.35) теңдеу арқылы қайта түсіндіруге болады,

$$Rf_R - 2f = \kappa^2 T. \quad (1.50)$$

Осылайша, (1.46) теңдеуінің шешімін жаңа метриkanı анықтау арқылы оңай табуға болады  $h_{\mu\nu} \equiv f_R(T)g_{\mu\nu}$ , алынған теңдеу қарапайым түрде  $\nabla_{\lambda}^{\tilde{C}}(\sqrt{-hh^{\mu\nu}}) = 0$  сызықтық байланыс нәтижесінде пайда болады

$$\tilde{C}_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{h^{\alpha\rho}}{2}(\partial_{\mu}h_{\rho\nu} + \partial_{\nu}h_{\rho\mu} - \partial_{\rho}h_{\mu\nu}). \quad (1.51)$$

Бұл байланысты  $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$  анықтайтын теңдеулерді талдау кезінде байқағанымыз  $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$  шамасы симметриялы бөліктен тұрады,  $\tilde{C}_{\mu\nu}^{\lambda}$  және векторлы бөлігі  $-\frac{2}{3}\delta_{\nu}^{\lambda}A_{\mu}$ . Бұл вектор қисаю тензоры бар екеніне жауап береді

$$S_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{3}(\delta_{\mu}^{\lambda}A_{\nu} - \delta_{\nu}^{\lambda}A_{\mu}),$$

бірақ бұл метрика (1.34) өріс теңдеулеріне әсер етпейді. Талдаудан төрт шарт шығады, олардан:  $A_{\mu} \equiv S_{\alpha\mu}^{\sigma} = 0$ , бұл қисаю тензоры толық жойылуы үшін жеткілікті. Материя мен байланыс, байланысты болған кезде, қисаю тензорына шектеу  $S_{\alpha\mu}^{\sigma} = 0$ , сонымен қатар ЖСТ-да және  $f(R)$  теорияда да скалярлық қисықтықтың мүмкін инварианттылығына байланысты өріс теңдеулерінің ықтимал сәйкессіздіктерін болдырмау әдісі ретінде ұсынылды.

Қисаю тензоры тривиальды емес  $\tilde{C}_{\mu\nu}^{\lambda}$  екені (1.51) өрнегін енгізу арқылы ынталандырылуы мүмкін және (1.49) теңдеуден пропорцияны қолданып  $h_{\mu\nu} \equiv f_R g_{\mu\nu}$  табуға болады

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = L_{\mu\nu}^{\alpha} + \frac{1}{2f_R}[\delta_{\mu}^{\alpha}\partial_{\nu}f_R - g_{\mu\nu}\partial^{\alpha}f_R] - \frac{2}{3}\delta_{\nu}^{\alpha}\left(A_{\mu} - \frac{3}{4f_R}\partial_{\mu}f_R\right), \quad (1.52)$$

жоғарыда айтқандай

$$L_{\mu\nu}^{\alpha} \equiv \frac{g^{\alpha\rho}}{2}(\partial_{\mu}g_{\rho\nu} + \partial_{\nu}g_{\rho\mu} - \partial_{\rho}g_{\mu\nu}).$$



Өйткені қозғалыс вектордың болуына байланысты емес

$$\tilde{A}_\mu \equiv A_\mu - \frac{3}{4f_R} \partial_\mu f_R,$$

онда,  $\tilde{A}_\mu = 0$  алуға болады. Осылайша,

$$S^\alpha{}_{\mu\nu} = \frac{\partial_\lambda f_R}{4f_R} (\delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\lambda - \delta_\nu^\alpha \delta_\mu^\lambda)$$

және  $\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} = L^\alpha{}_{\mu\nu} + K^\alpha{}_{\mu\nu}$ , мұндағы  $K^\alpha{}_{\mu\nu} = S^\alpha{}_{\mu\nu} + S_\mu{}^\alpha{}_\nu + S_\nu{}^\alpha{}_\mu$  контрсион тензоры деп аталады. Бұл қатынастың метрикамен  $g_{\mu\nu}$  үйлесімділігін оңай тексеруге болады, яғни ол  $\nabla_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) = 0$  тең екенін дәлелдейді. Бұл нәтиже Палатини формализміндегі  $f(R)$  теориясының қозғалыс теңдеуінің контрсион тензоры, метрикалық формализмінде  $f(R)$  теориясына тең екенін көрсетеді. Сонымен бірге, бұл екі ерекше жағдай векторлық өріс тудыратын ерікті ширатумен метрикалық үйлесімсіз Палатини формализміндегі  $f(R)$  гравитациялық теориясында эквивалентті болып табылады. Енді метрика үшін байланыс теңдеуі бар (1.37), бұл шешімді  $\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}$  (1.34) теңдеуге тек метрика мен материяны қамтитын теңдеуді алу үшін қолдансақ:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu}(g) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R(g) &= \frac{\kappa^2}{f_R} T^{\mu\nu} - \frac{Rf_R - f}{2f_R} g_{\mu\nu} - \\ &\frac{3}{2(f_R)^2} \left[ \partial_\mu f_R \partial_\nu f_R - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\partial f_R)^2 \right] + \frac{1}{f_R} \left[ \nabla_\mu \nabla_\nu f_R - g_{\mu\nu} \square f_R \right] \\ R_{\mu\nu}(g) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R(g) &= \frac{k}{f_R} T^{\mu\nu} - \frac{Rf_R - f}{2f_R} - \\ &\frac{3}{2(f_R)^2} \left[ \partial_\mu f_R \partial_\nu f_R - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\partial f_R)^2 \right] + \frac{1}{f_R} \left[ \nabla_\mu \nabla_\nu f_R - g_{\mu\nu} \Delta \nabla f_R \right]. \end{aligned} \quad (1.53)$$

мұндағы  $R_{\mu\nu}(g)$ ,  $R(g)$  және  $\nabla_\mu \nabla_\nu f_R$  Ливи-Чивита байланысын қолданып,  $g_{\mu\nu}$  метрика үшін есептелінеді, сонымен қатар  $R$  және  $f_R$ -дың ширату тензорының функциясы ретінде қарастыру қажет. Белгілеулерді айқын ету үшін  $h_{\mu\nu}$  және  $g_{\mu\nu}$  конформды байланысқанын ескеріп,  $R = R(T) \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}(T)$  және  $R(g) \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}(g)$  тең болатынын есепке алып, келесі байланысты жазамыз

$$R = R(g) + \frac{3}{2f_R} \partial_\lambda f_R \partial^\lambda f_R - \frac{3}{f_R} \Delta \nabla f_R \quad (1.54)$$

мұндағы  $f_R = f_R(T)$ ,  $T$  айнымалысына тәуелді функция. Маңызды мәселе, егерде  $T_{\mu\nu} = 0$  вакуум шартын ескеріп (1.54) теңдеуден шығатыны  $R_{vac} \equiv R(0)$ , бұл дегеніміз  $f_R(0)$  тұрақты шамаға айналады. Нәтижесінде (1.53) теңдеудің оң жақтағы туындысы жойылады және теңдеу төмендегідей түрге келеді

$$G_{\mu\nu} = -\Lambda_{eff} g_{\mu\nu},$$

мұнда  $\Lambda_{eff} \equiv \frac{Rf_R - f}{2f_R} \Big|_{R=R_{vac}}$ , тиімді космологиялық тұрақты рөлін атқарады. Бұл Палатини формализмі  $f(R)$  теорияларының динамикасы космологиялық тұрақтысы бар ЖСТ-ның динамикасынан тек тұрақты емес және  $\partial f_R$  шарттары нөлге тең емес жағдайды да  $\frac{Rf_R - f}{2f_R}$  қамтитын аймақтарда ғана ерекшеленетінін білдіреді.

Кейбір жағдайлар үшін Палатини формализміндегі (1.53) өріс теңдеулерін  $h_{\mu\nu}$  орнына  $g_{\mu\nu}$  көмекші метрикамен қолдану пайдалы болуы мүмкін. Осыны ескеріп  $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}(\Gamma)$  байланыс  $R(h) \equiv h^{\mu\nu} R_{\mu\nu}(\Gamma)$  болғанда  $R(h) = R/f_R$  (1.53) теңдеуді қайта жазуға болады

$$G_{\mu\nu}(h) = \frac{\kappa^2}{f_R(T)} T_{\mu\nu} - \Lambda(T) h_{\mu\nu}, \quad (1.55)$$

мұнда

$$\Lambda(T) \equiv (Rf_R - f)/2f_R^2 = (f + \kappa^2 T)/2f_R^2.$$

Егер Жордан координаттар жүйесінде теорияны құруға алып келетін бастапқы физикалық мотивтер шешілсе, Эйнштейн координаттар жүйесінің метрикасын  $h_{\mu\nu}$  бос бөлшектердің геодезиясын анықтайтын физикалық метрика ретінде түсіндіруге шешім қабылданса (бұл физикалық бақыланатын заттардың қайта анықтамасын білдіреді), онда оны тығыздыққа тәуелді эффективті тұрақты немесе Ньютон және өзгеретін космологиялық тұрақтысы  $\Lambda(T)$  бар теория ретінде қарастыруға болады. Бұл мүмкіндікке әдебиеттерде де біраз көңіл бөлінген [20, с. 72].

Тұрақты вакуум жағдайын қарастыратын теңдеулер туралы соңғы ескерту (1.52) метриkanың тұрақты масштабталынуы  $h_{\alpha\beta} \rightarrow \lambda h_{\alpha\beta}$  кезінде және  $G_{\mu\nu}(h_{\alpha\beta}) = G_{\mu\nu}(\lambda h_{\alpha\beta})$  инвариантты екенін көру болып табылады. Енді (1.53) және (1.55) теңдеулерін вакуум жағдайындағы теңдеулермен салыстырсақ,  $G_{\mu\nu}(g) = -\Lambda_{eff} g_{\mu\nu} = -\tilde{\Lambda}_{eff} h_{\mu\nu}$  және  $\Lambda_{eff} = f_R(0)\tilde{\Lambda}_{eff}$  табамыз. Локальды

эксперименттер мен жұлдыздық құрылымды талқылау үшін метриканы  $g_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$ -деп, немесе  $g_{\mu\nu} = \frac{f_R(0)}{f_R(T)} h_{\mu\nu}$ -ге дейін өзгерту ыңғайлы болып табылады. Бұл  $\Lambda_{\text{eff}} = \tilde{\Lambda}_{\text{eff}}$ -ге алып келеді, ол жай ғана екі тұрақтының бірдей бірліктерде өлшенетінін айтады. Қарапайым бақылаудан Эйнштейн мен Жордан санақ жүйесінде Палатини  $f(R)$  теориясы қозғалысының айырмашылығы, энергия-импульстік тығыздық факторы мен ерекшеленетінін анық көрсетеді. Тұрақты масштабтау арқылы,

$$g_{\mu\nu} = \frac{f_R(0)}{f_R(T)} h_{\mu\nu} = \frac{1}{\phi(T)} h_{\mu\nu},$$

(1.55) өріс теңдеуін былай жазуға болады

$$G_{\mu\nu}(h) = \frac{\tilde{\kappa}^2}{\phi(T)} T_{\mu\nu} - \tilde{\Lambda}(T) h_{\mu\nu}, \quad (1.56)$$

мұнда  $\tilde{\kappa}^2 \equiv \kappa^2/f_R(0)$  және  $\tilde{\Lambda}(T) \equiv (f/f_R(0) + \kappa^2 T)/2\phi^2$

### 1.3 $f(R)$ гравитация теориясының скалярлық-тензорлық көріністері

Жоғарыда келтірілген (1.53) қозғалыс теңдеуі Бранс-Диккенің скалярлық-тензорлық теориясының әдеттегі (метрикалық үйлесімді және ширамайды) теңдеулері ретінде қайта жазылуға болады

$$S[g_{\mu\nu}, \phi, \psi_m] = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \phi R(g) - \frac{\omega}{\phi} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi) - V(\phi) \right] + S_m[g_{\mu\nu}, \psi_m], \quad (1.57)$$

келесі белгілеулерді енгізіп

$$\phi = f_R, \quad V(\phi) = R\phi - f(R). \quad (1.58)$$

мұнда  $V = V(\phi)$  және  $\phi = f_R$ ,  $R = R(\phi)$ . Содан кейін метрика үшін (1.53) қозғалыс теңдеуі келесі түде жазамыз

$$G_{\mu\nu}(g) = \frac{\kappa^2}{\phi} T_{\mu\nu} - \frac{1}{2\phi} g_{\mu\nu} V(\phi) + \frac{\omega}{\phi^2} \left[ \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\partial\phi)^2 \right] + \frac{1}{\phi} \left[ \nabla_\mu \nabla_\nu \phi - g_{\mu\nu} \Delta \phi \right] \quad (1.59)$$

осы жағдайда тұрақты параметр  $\omega = -3/2$  шамасын қабылдайды. Бранс-Дикке теориясында скалярлық өріс  $\phi$  келесі теңдеумен анықталады

$$(3 + 2\omega)\Delta\nabla\phi + 2V(\phi) - \phi\frac{dV}{d\phi} = \kappa^2 T ,$$

$w = -3/2$  параметрінің мәні үшін, скаляр өрістің қозғалыс теңдеуін жазамыз

$$2V(\phi) - \phi\frac{dV}{d\phi} = \kappa^2 T . \quad (1.60)$$

Скаляр өріс теңдеуінде  $\partial^\mu\partial_\mu\phi$ -дің болмауы скаляр өрісті динамикасыз етеді, сондықтан материя мен скаляр өріс  $\phi$  арасындағы қозудың болмауына байланысты, Бранс-Дикке теориясындағыдай күшті байланыс ретінде түсіндіруге болмайды. Себебі  $\partial^\mu\partial_\mu\phi$  энергетикалық тензорлық із импульсі арқылы индукцияланады. Демек, бұл теңдеу негізгі материя мен Палатини формализміндегі көмекші скаляр өріс  $\phi$  арасындағы әсердің алгебралық байланысын орнатады.

Бұл интерпретация, әрине, скаляр-тензорлық бейнелеуге мүмкіндік бермейтін жалпы Палатини теориясында орындалады. Сондықтан Палатини формализміндегі  $f(R)$  теориясының нұсқасындаға метрикалық формализмнен айырмашылығы тәуелсіз байланыс еркіндіктің жаңа динамикалық дәрежелерін енгізбейді. Керісінше, ол өріс теңдеулерінің оң жағында метрикамен байланысты жаңа материялық терминдерді қосу арқылы, материяның кеңістік-уақыт қисықтығының жасалу жолын өзгертеді.

*Энергия мен импульстің сақталуы*

Палатини формализмінде  $f(R)$  гравитациялық теориясында, (1.30) теңдеуі түріндегі гравитацияның барлық метрикалық формализмі сияқты, энергия-импульс тензорының сақталуы табиғи түрде қанағаттандырылады және материя әсерінің дифеоморфизмдері кезіндегі инварианттылықтан туындайды. Мұны келесі жолмен көруге болады,  $\delta x^\mu = \varepsilon^\mu(x)$  координаталарының шексіз аз өзгеруімен әсердің өзгеруін қарастырайық

$$\delta S_m = \frac{1}{2} \int d^4x \frac{\delta(\sqrt{-g}L_m)}{\delta g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu} .$$

Өйткені энергия-импульс тензор  $T^{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}L_m)}{\delta g_{\mu\nu}}$  ретінде анықталады және дифеоморфизм  $\delta g_{\mu\nu} = 2\nabla_{(\mu}\varepsilon_{\nu)}$  метрикасының өзгеруін тудырады, мұндағы

$\nabla_\mu$  қарапайым туынды операторлары болып табылады, оның ішінде  $g_{\mu\nu}$  метрикасының Кристоффель символдары да бар, бұл

$$\delta S_m = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} T^{\mu\nu} \nabla_\mu \varepsilon_\nu. \quad (1.61)$$

Егер, диффеоморфизмдер кезінде материяның әсері инвариантты болса  $\delta S_m = 0$ , онда бөліктеп интегралдау келесі түрге алып келеді:

$$\delta S_m = -\frac{1}{2} \int d^4x \nabla_\mu (\sqrt{-g} T^{\mu\nu}) \varepsilon_\nu = 0. \quad (1.62)$$

Ерікті  $\varepsilon_\nu$  үшін  $\nabla_\mu (\sqrt{-g} T^{\mu\nu}) = \sqrt{-g} \nabla_\mu T^{\mu\nu}$  және  $\delta S_m$  жойылады, онда  $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ . Осы нәтижеге қарамастан, кейде Палатини формализмі  $f(R)$  гравитациялық теориясында энергия-импульс тензорының сақталу заңын қанағаттандырмайды деп айтылды [40, p. 35].

#### 1.4 $f(R)$ гравитациядағы инфляция

Алдымен инфляциялық парадигманы сипаттау кезінде метрикалық  $f(R)$  гравитацияның негізгі жетістіктерін қарастырамыз. Бұл тұрғыда модификацияланған гравитация шеңберіндегі Старобинский инфляциясы, инфляцияның басты жетістігі болып табылады [26, p. 390]. Модель әдетте әсерге скаляр Риччидің квадраттық мүшесінің бар болуына негізделген:

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} \left[ R + \frac{R^2}{6m^2} \right]. \quad (1.63)$$

мұнда  $R$  Риччи скаляры және  $R^2 \equiv R \cdot R = (g^{\mu\nu} R_{\mu\nu})(g^{\rho\sigma} R_{\rho\sigma})$ , ал  $m$  параметрі масса өлшемі және инфлатонның массасы болуы мүмкін (метрикалық формализмде). Әсіресе, бірінші ретті модельдің тұжырымдамасын қарастырған кезде, Старобинский параметрі (тұрақтысы) деп аталатын жаңа өлшемсіз параметрді анықтау ыңғайлы болады

$$\alpha \equiv \frac{1}{6\kappa^2 m^2}.$$

Инфрақызыл шектерде  $R \ll m^2$ -де модель негізінен космологиялық тұрақтымен (үлкен дәл баптаудан кейін) анықталуы мүмкін шағын мүшесі бар ЖСТ-ға қалай айналатындығына назар аудартады. Алайда,  $R \approx m^2$  болғанда екінші мүшенің маңызды үлесі болады.

Модель өзінің алғашқы ұсынысында бастапқы Әлемнің инфляциялық ұлғаюы де-Ситтер тәрізді болатынын болжады. Бұған гравитациялық кванттық түзетулер, қисықтық күшті деп саналатын Әлемнің алғашқы кезеңдерінде рөл атқаруы керек деген идея түрткі болды (күшті гравитация шегі), сондықтан жалпы әсерге жоғары ретті қисықтық инварианттары енгізілуі керек. Бір циклды тәртіпте кванттық түзетілген әсерге түрлі операторлар қатысады [55, р. 14]:

$$\propto R^2, \quad R^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \quad R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma},$$

алайда, соңғысына теріс Дирак немесе энергия нормасы бар, төменнен шектеусіз, теорияның бірлігін немесе себептілігін бұзатын елес өрістер жатады.

Қазіргі уақытта (1.63) әсермен сипатталған модель әдеттегі спин-гравитонға және қосымша скалярлық режимге қалай әкелетіні анық емес. Содан кейін  $\chi$  көмекші скаляр өріс енгіземіз және бастапқы әсерді келесідей түрлендіреміз

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{k^2} + 2\alpha\chi^2 \right) R - \frac{\alpha}{2} \chi^4 \right\}. \quad (1.64)$$

Егер де әсерді  $\chi^2$  қатынасы бойынша өзгертсек, онда  $\chi^2 = R$  байланыс теңдеуіне алып келеді, ал оны қайтадан әсерге ауыстыру арқылы (1.63) теңдеуіндегі бастапқы әсерге тең болатынын көреміз. Жалпы жағдайда өрісті  $\bar{\chi} \equiv \chi^2$  деп енгізуге болады, бірақ (1.64) теңдеуінде берілген әсерге өлшемді талдау құралдарын қолдану ыңғайлы екені анықталды. Бұл (1.63) теңдеудегі әсердің скалярлық көрінісі деп аталады және кез-келген скаляр қисықтықты  $f(R)$  функциясының келесідей жалпылауы ретінде қарастыруға болады

$$\int f(R) \rightarrow \int \{f'(\chi)(R - \chi) + f(\chi)\} \equiv \int \{\Omega^2(\chi)R - V(\chi)\},$$

мұнда  $f''(R) \neq 0$ ,  $\Omega^2(\chi) \equiv f'(\chi)$  және  $V(\chi) \equiv f(\chi) - \chi f'(\chi)$  белгілеулер қолданылады. Шын мәнінде, Старобинский модельін  $f(R) \propto R + R^2$ -дің  $f(R)$  теорияның жалпы класының ерекше жағдайы ретінде қарастыруға болады. Бірден ойлануға болатын тағы бір мысал,  $f(R)$  функциясындағы  $m^2$  масса параметрінің ыдырауы болып табылады, осыдан  $R$  қисықтық скалярының жоғары дәрежелерін қамтитын функциясын анықтаймыз

$$f(R) = \frac{1}{2k^2} R + \frac{1}{k^2} \sum_{n=2}^{\infty} a_n m^2 \left( \frac{R}{m^2} \right)^n,$$

мұндағы  $a_n$  ыдырау коэффициенттері.  $f(R)$  теориясының бұдан да күрделі жағдайлары бар екендігі түсінікті, бірақ олар әрбір жағдайда болуы мүмкін ықтимал патологияларды зерттеумен бірге жүруі керек.

#### Метрикалық формализм

Жоғарыда (1.64) әсерінде берілген Старобинский моделінің скалярлық көрінісіне назар аударып, Вейлл бойынша метрикалық масштабтауды келесідей болатынын ескерсек

$$\bar{g}_{\mu\nu}(x) = \Omega^2(\chi)g_{\mu\nu}(x), \quad (1.65)$$

бұдан конформды фактор қалай анықталатынын көруге болады

$$\Omega^2(\chi) \equiv k^2 \left( \frac{1}{k^2} + 2\alpha\chi \right).$$

Кристоффель символдарын түрленуі

$$\left\{ \begin{matrix} \rho \\ \mu \nu \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \mu \nu \end{matrix} \right\} + \Omega^{-1} (2\delta^{\rho}_{(\mu} \nabla_{\nu)} \Omega - g_{\mu\nu} \nabla^{\rho} \Omega). \quad (1.66)$$

Көптеген есептеулерден кейін Риччи скалярының келесідей түрленетінін көруге болады

$$R = \Omega^2 \bar{R} + 6 \frac{\Omega^2}{\sqrt{-g}} \bar{\nabla}_{\mu} \left( \sqrt{-g} \bar{\nabla}^{\mu} \ln \Omega \right) - 6 \bar{g}^{\mu\nu} \bar{\nabla}_{\mu} \Omega \bar{\nabla}_{\nu} \Omega,$$

мұнда  $\bar{\nabla}$  шамасы  $\bar{g}$  метрикасы бойынша ковариантты туындыны білдіреді. Соңында, жоғарыда айтылғандардың барлығын Старобинскийдің 4 өлшемді модель үшін қолдана отырып, оны келесідей түрлендіре аламыз

$$\begin{aligned} S[\chi, \bar{g}; \alpha] = \int d^4x \sqrt{-g} & \left\{ \frac{1}{2k^2} \bar{R} - 3 \frac{\bar{\nabla}^{\mu} \Omega(\chi) \bar{\nabla}_{\mu} \Omega(\chi)}{k^2 \Omega^2(\chi)} - \frac{V(\chi)}{\Omega^4(\chi)} \right\} + \\ & + \int d^4x \bar{\nabla}_{\mu} \left( \sqrt{-g} \bar{\nabla}^{\mu} \ln \Omega \right), \end{aligned} \quad (1.67)$$

егер де,  $V(\chi) = \alpha\chi^2/2$  белгілеуін қайта қолданып, соңғы интегралға одан әрі еленбейтін беттік мүшені енгізіп және (1.67) теңдеуде берілген  $\Omega(\chi)$  функциясының түрін ауыстырсақ, әсер функционалды болады:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2k^2} \bar{R} - \frac{3\alpha^2}{\left(1 + \frac{2\alpha\chi}{k^2}\right)^2} \bar{\nabla}^\mu \chi \bar{\nabla}_\mu \chi - \frac{\alpha k^4 \chi^2}{2\left(\frac{1}{k^2} + 2\alpha\chi\right)^2} \right\}. \quad (1.68)$$

Бұл гравитациямен минималды байланысқан скаляр өріс және канондық емес кинетикалық мүшесі бар скаляр-тензор теориясына тепе-тең болады. Канондық емес кинетикалық мүшесі бар скаляр өріс алу үшін біз өрісті қайта анықтауды қолданамыз:

$$-\frac{3\alpha^2}{\left(1 + \frac{2\alpha\chi}{k^2}\right)^2} \bar{\nabla}^\mu \chi \bar{\nabla}_\mu \chi \mapsto -\frac{1}{2} (\bar{\nabla}\phi)^2$$

$$\therefore k^2 \phi = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \ln \frac{\frac{1}{k^2} + 2\alpha\chi}{\frac{1}{k^2}}, \quad \forall \chi > -\frac{1}{2\alpha k^2}.$$

Осы өрнектерді қолдана отырып әсерді келесі түрде қайта жазуға болады

$$S = \int d^4x \sqrt{-g_E} \left[ \frac{R_E}{2\kappa^2} - \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_E \partial^\mu \phi_E - V_E(\phi_E) \right], \quad (1.69)$$

мұндағы,  $E$  индексі Эйнштейн салыстырмалық жүйесінде қарастырылған шамаларды білдіреді. Жоғарыдағы (1.64) Старобинский әсері үшін  $V_E(\phi_E)$  потенциал келесідей алынады:

$$V_E(\phi_E) = \frac{3}{4\kappa^2} m^2 \left(1 - e^{-\sqrt{2/3}\kappa\phi_E}\right)^2. \quad (1.70)$$

Эйнштейн салыстырмалық теориясын Фридман-Робертсон-Уоркер (ФРУ) жазық метрикасында қарастырсақ:

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \sum_i dx_i^2, \quad (1.71)$$

мұндағы  $a(t)$  масштабты фактор. Сәйкесінше қозғалыс теңдеулерін келесі түрде жазуға болады:



$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3} \left[ \frac{1}{2} \dot{\phi}_E + V_E(\phi_E) \right], \quad (1.72)$$

$$\dot{H} = -\frac{\kappa^2}{2} \dot{\phi}_E^2, \quad ,$$

ал скаляр өріс үшін теңдеу, скаляр өрісі  $\phi$  бойынша әсердің (1.69) вариациясы арқылы алынады:

$$\ddot{\phi}_E + 3H\dot{\phi}_E + V'(\phi_E) = 0. \quad (1.73)$$

Демек, (1.72) ФРУ теңдеулері (1.73) скаляр өріс теңдеуімен бірге минималды байланысқан скаляр өрісі бар инфляциялық модельдерге сәйкес келеді. Баяу сырғу жағдайында келесі шарттар орындалу қажет

$$\frac{1}{2} \dot{\phi}_E^2 \ll V_E(\phi_E) \quad \text{және} \quad \ddot{\phi} \ll H\dot{\phi}_E$$

онда осы шарттарды ескеріп, ФРУ-дың бірінші теңдеуі және скаляр өріс теңдеуі келесідей қайта жазылады:

$$H^2 \approx \frac{\kappa^2}{3} V_E(\phi_E), \quad 3H\dot{\phi}_E + V'(\phi_E) \approx 0. \quad (1.74)$$

Демек, тиісті скалярлық потенциал үшін баяу сырғу инфляция сценарийі жүзеге асырылуы мүмкін. Шын мәнінде, (1.70) теңдеудегі потенциал үшін, оның баяу сырғу параметрлері келесідей болады:

$$\varepsilon \cong \frac{4}{3} \left( e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\phi_E} - 1 \right)^{-2} \cong \frac{4}{3} e^{-2\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\phi_E}, \quad (1.75)$$

$$\eta \cong \frac{4}{3} \frac{2 - e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\phi_E}}{\left( -1 + e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\phi_E} \right)^2} \cong \frac{4}{3} e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\phi_E}. \quad (1.76)$$

мұндағы  $\kappa\phi_E \gg 1$ . Инфляция кезеңінің басында скаляр өріс үлкен мәнге ие болған  $\varepsilon \ll 1$  және  $\eta \ll 1$ , ал Хаббл параметрі шамамен тұрақты, нәтижесінде экспоненциалды ұлғаю пайда болады. Скаляр өріс төмен қарай жылжып, баяу сырғу параметрі  $\varepsilon \approx 1$  болғанда, оның кинетикалық мүшесі үлкейіп инфляция кезеңі аяқталады. Инфляцияның маңызды нүктесі -бұл бастапқы кезеңдердегі

мәселелерді шешу үшін жеткілікті, сондықтан  $e - \phi$  саны жеткілікті түрде созылуы керек

$$N = \int_{t_{start}}^{t_{end}} H dt \approx 55 - 65. \quad (1.77)$$

ФРУ теңдеуін қолдана отырып,  $e - \phi$  санын скаляр өріс үшін есептеуге болады:

$$N = -\kappa^2 \int_{\phi_{Ei}}^{\phi_{Eend}} \frac{V_E(\phi_E)}{V'_E(\phi_E)} d\phi_E \approx \frac{3}{4} e^{\sqrt{2/3}\kappa \phi_{Ei}}. \quad (1.78)$$

Назар аударатын мәселелердің бірі,  $e - \phi$  саны баяу сырғу параметрлерімен байланысты:

$$\varepsilon \approx \frac{3}{4} \frac{1}{N^2}, \quad \eta \cong \frac{1}{N}. \quad (1.79)$$

Қисықтық қатынастарындағы спектрлік индекс және тензордың скалярға қатынасы параметрлері келесідей анықталады:

$$n_s - 1 = 6\varepsilon + 2\eta, \quad r = 16\varepsilon. \quad (1.80)$$

Соңғы Планк миссиясынан анықталған бақылау деректеріне сәйкес, осы екі параметр шектері келесідей мәнге ие [61,62]:

$$n_s = 0.9659 \pm 0.0041 \quad r < 0.11 \quad (1.81)$$

Осы жерден Старобинский инфляциясы үшін  $e - \phi$  саны 65-ке тең деп алсақ, онда

$$n_s = 0.968, \quad r = 0.00284$$

бұл жоғарыда аталған шектеулерге өте жақсы сәйкес келеді және бұл Старобинский және метрикалық инфляциясының  $f(R)$  гравитация теориясындағы үлкен жетістіктерінің бірі болып табылады.

Дегенмен, алдыңғы бөлімде көрсетілгендей, Палатини формализмі үшін  $f(R)$  гравитациясында олай емес, себебі (1.61) теңдеуінен (1.70) теңдеудегі метрикалық тензормен салыстырғанда скаляр өрісі таралмайтынын және материя болмаған кезде скаляр өріс тұрақты болатынын көруге болады, осылайша тек Әлемнің үдемелі ұлғаюын тоқтаусыз және өзгерусіз болуын және космологиялық тұрақты тиімді болуын қажет етеді. Палатини формализмінде

инфляцияны тудырудың жалғыз жолы  $f(R)$  гравитациясында ізсіз материяның болуы, өйткені инфлатон рөлін атқаратын скаляр өрістің болуы қажет.

### 1.5 Палатини формализмінде $f(R)$ гравитациясының баяу сырғу инфляциясы

Жоғарыда көрсетілгендей, Палатини формализмінің  $f(R)$  гравитация әсеріне байланысты скаляр өріс таралмайды және оның негізі ізсіз материяның болуы болып табылады, инфляцияны болдырудың жалғыз жолы әсерге инфлатон өрісін қосу. Алайда,  $f(R)$  гравитациясының лагранжианын Палатини формализмінде баяу сырғу параметрлері ЖСТ-дағы патаметрлерімен салыстырғанда өзгеше. Мұнда біз Палатини формализмі лагранжианын  $f(R)$  гравитациясында (1.57) теңдеулерде көрсетілгендей көмекші скаляр өрісі арқылы, инфлатон рөлін атқаратын қосымша  $\chi$  скаляр өріс ретінде қарастырамыз:

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \phi R(g) + \frac{3}{2\phi} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \right] + \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi - U(\chi) \right]. \quad (1.82)$$

Тиісті өріс теңдеулері (1.58) өрнегімен берілген. Мұндағы  $\phi = f_R$  және  $V(\phi) = R\phi - f(R)$  болғанда,  $\chi$  өрісі үшін энергия-импульс тензоры:

$$T_{\mu\nu}^{\chi} = \partial_\mu \chi \partial_\nu \chi - g_{\mu\nu} \left( \frac{1}{2} \partial_\alpha \chi \partial^\alpha \chi + U(\chi) \right). \quad (1.83)$$

Егер жоғарыда көрсетілгендей ФРУ жазық метрикасын қарастырсақ (1.71), Фридман теңдеулері келесідей болады

$$3H^2 = \frac{\kappa^2}{\phi} \left( \frac{1}{2} \dot{\chi}^2 + U(\chi) \right) - 3H \frac{\dot{\phi}}{\phi} - \frac{3}{4} \left( \frac{\dot{\phi}}{\phi} \right)^2 + \frac{1}{2\phi} V(\phi),$$

$$-2\dot{H} = \frac{\kappa^2}{\phi} \dot{\chi}^2 - H \frac{\dot{\phi}}{\phi} - \frac{3}{2} \left( \frac{\dot{\phi}}{\phi} \right)^2 + \frac{\ddot{\phi}}{\phi}, \quad (1.84)$$

скаляр өрістерге арналған теңдеулер төмендегідей анықталады

$$2V(\phi) - \phi V'(\phi) = \kappa^2 (\dot{\chi}^2 - 4U(\chi)),$$

$$\ddot{\chi} + 3H\dot{\chi} + U'(\chi) = 0. \quad (1.85)$$

Енді скаляр өріс  $\chi$  Әлемнің ұлғаюының инфляциялық фазасы кезінде баяу сырғу режимінде деп санауға болады, мысалы ЖСТ-дағы әдеттегі бір өріс инфляциясы секілді. Сондықтан, көмекші скаляр өріс үшін келесі баяу сырғу шарттарын қабылдаймыз :

$$U(\chi) \gg \frac{1}{2} \dot{\chi}^2, \quad H\dot{\chi} \gg \ddot{\chi} \quad (1.86)$$

Сондықтан скаляр өріс теңдеуі (1.85) төмендегідей түрге келеді

$$2V(\phi) - \phi V'(\phi) \approx -4\kappa^2 U(\chi) \\ 3H\dot{\chi} + U'(\chi) \approx 0. \quad (1.87)$$

Осы жерде бір скаляр өрісті инфляциялық модельге дейін азаяды деген қорытындыға келеміз, өйткені (1.87) бірінші теңдеуінен  $\phi \approx \phi(\chi)$  алынады, сондықтан  $\phi$  скаляр өріс теңдеуінің нақты шешімдері бар. Бұл таңқаларлық жағдай емес, өйткені (1.85) теңдеуінде скаляр өрістің  $\phi$  бірінші және екінші туындылары жоқ, алдыңғы бөлімде талқыланған аспект. Палатини формализміне тән, ол көмекші скаляр өрісінің таралуын болдырмайды. Сонымен қатар, (1.87) теңдеуінің салдары ретінде инфляция кезінде көмекші өріс шамамен тұрақты болады деп болжауға болады, осылайша (1.84) теңдеуден  $\frac{\dot{\phi}^2}{V(\phi)} \ll 1$  және  $\frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}} \ll 1$  орындалады. Демек, (1.86) теңдеуге және (1.87) скаляр өріс теңдеуіне баяу сырғу жуықтауын қолдана отырып,  $H\dot{\phi}$  мүшесін келесідей көрсетуге болады:

$$H\dot{\phi} = H \frac{d\phi}{d\chi} \dot{\chi} \approx \frac{1}{3} \frac{d\phi}{d\chi} U'(\chi), \quad (1.88)$$

ФРУ-дің (1.84) теңдеуінде  $\dot{\phi}^2$  және  $\ddot{\phi}$  мүшелерін елемесек, оны тек инфлатон өрісі  $\chi$  арқылы келесідей жуықтауға болады:

$$3H^2 \approx \frac{1}{\phi} \left[ \kappa^2 U(\chi) + \frac{d\phi}{d\chi} U'(\chi) + \frac{1}{2} V(\phi(\chi)) \right] = \kappa^2 U_{\text{eff}}(\chi), \\ -2\dot{H} \approx \frac{1}{\phi} \left( \kappa^2 \dot{\chi} + \frac{1}{3} \frac{d\phi}{d\chi} U'(\chi) \right) \approx \frac{1}{3\phi} \left( \frac{U'^2(\chi)}{U_{\text{eff}}(\chi)} + \frac{d\phi}{d\chi} U'(\chi) \right). \quad (1.89)$$

Демек  $\phi = \phi(\chi)$  екенін ескеретін болсақ, бұл теңдеулер тек инфлатон  $\chi$  өрісінің динамикасына байланысты. Сонымен қатар, мұнда  $\chi$  баяу сырғу шарттары скаляр өріс үшін (1.86)-(1.87) теңдеулер жүйесінде қолданылады және сол кезде эффективті потенциал келесі түрде анықталады:

$$U_{\text{eff}} = \frac{1}{\kappa^2 \phi} \left[ \kappa^2 U + \frac{d\phi}{d\chi} U'(\chi) + \frac{1}{2} V(\phi(\chi)) \right]. \quad (1.90)$$

Осылайша, (1.75)-(1.76) баяу сырғу параметрлері келесідей анықталынады:

$$\varepsilon \approx \frac{1}{2\kappa^2 \phi} \left[ \left( \frac{U'}{U_{\text{eff}}} \right)^2 + \frac{d\phi}{d\chi} \frac{U'}{U_{\text{eff}}} \right],$$

$$|\eta| \approx \frac{1}{\kappa^2} \frac{U''}{U_{\text{eff}}}. \quad (1.91)$$

Егер де  $f(R) = R = R(g)$ , скаляр өріс  $\phi = 1$  және баяу сырғудың параметрлері (1.91) теңдеуіндегідей болса  $U$  инфлатон потенциалын ЖСТ-мен сәйкес келеді. Егер (1.87) жуықтаулары орындалмаса, онда баяу сырғу параметрлері  $\varepsilon \ll 1$  және  $\eta \ll 1$  шарттарымен анықталады, ал ұлғаю  $\dot{\chi}^2 \approx 2U(\chi)$  кезеңі аяқталады.

Модификацияланған  $f(R)$  гравитациялық моделін қарастырсақ, инфлатон үшін келесі жиі қолданылатын потенциалды тандаймыз:

$$U(\chi) = \frac{1}{2} m_\chi^2 \chi^2. \quad (1.92)$$

Бұл потенциал басқа да жұмыстарда кеңінен талқыланған және ЖСТ-да (1.86) баяу сырғу жағдайында берілген хаотикалық инфляцияны сипаттайды

$$H^2 \approx \frac{\kappa^2}{6} m_\chi^2 \chi^2 \quad (1.93)$$

Ал (1.77) теңдеудегі  $e$ -*фолд* санын скаляр өріс арқылы келесідей өрнектеуге болады:

$$N = -\kappa \int_{\chi_i}^{\chi_{\text{end}}} \frac{U(\chi)}{U'(\chi)} d\chi \approx \frac{\kappa^2 \chi_i^2}{4}. \quad (1.94)$$

Осы жерден (1.73) теңдеудегі баяу сырғу параметрлерін табатын болсақ

$$\varepsilon = \eta = \frac{1}{N}, \quad (1.95)$$

$e - \phi$  фолд санын  $N = 65$  деп алып, спектрлік индекс пен тензордың скаляр қатынасы параметрлері үшін келесі мәндерді анықтаймыз:

$$n_s = 0.97, \quad r = 0.12. \quad (1.96)$$

Сонымен, (1.81) теңдеудегі соңғы Планк деректерімен салыстыра отырып,  $r$  шектеуді қанағаттандырмайтыны анық болады. Енді дәл осы инфлатоның потенциалын Палатини формализмінде келесі гравитациялық түрде қарастырып көрейік:

$$f(R) = \alpha R^n, \quad (1.97)$$

мұндағы  $\alpha$  және  $n$  белгісіз тұрақты шамалар. Гравитациялық мүшелердің бұл түрі бұрынғы жұмыстарда Палатини формализмінің бөлігі ретінде Риччи скалярының сызықтық мүшесімен бірге қарастырылғанын ескеріп, бұл модель космологияның эволюциясын жаңғырту үшін жақсы нәтиже көрсетеді [34, р. 39; 35, р. 46] және атап айтқанда,  $R^n$  - космологиялық ұйытқулар кезеңдерінде ЖСТ-мен салыстырғанда ұқсас нәтижелерді көрсетеді деуге болады [36, р. 19]. Сонымен қатар, гравитациялық әсердің бұл түрі локальды шектеулерді қанағаттандыра алады. Сәйкес скалярлық өріс  $\phi$  және оның потенциалы (1.58) теңдеуімен анықталады:

$$\phi = n\alpha R^{n-1}, \quad V(\phi) = k\phi^{n/n-1}, \quad (1.98)$$

мұндағы  $k = \frac{1}{(n\alpha)^{1/(n-1)}} \left( \frac{n-1}{n} \right)$ . Жоғарыдағы (1.86) теңдеулерде берілген  $\chi$  скаляр өріс үшін баяу сырғу шарттарын қабылдау арқылы  $\phi = \phi(\chi)$  қатынасы (1.87) теңдеудегі бірінші өрнектен алынады, яғни

$$\phi(\chi) \approx \left( \frac{k(n-2)}{2m_\chi^2(n-1)} \frac{1}{k^2 \chi^2} \right). \quad (1.99)$$

Осыдан  $n \neq 1, 2$  деп қорытынды жасай аламыз, өйткені  $n = 1$  де ЖСТ-ын қалпына келтіреміз, ал  $n = 2$  бұл (1.50) теңдеуімен көрсетілгендей «бұзылған» жағдайды көруге болады. Онда (1.89) теңдеулер төмендегідей жазылады:

$$3H^2 = \frac{\kappa^2 m_\chi^2}{2kn(n-2)} \frac{2^{1/n} kn(3n-4) + 8m_\chi^2 (n-1)^2 \left( \frac{k(n-2)}{(n-1)m_\chi^2 \kappa^2 \chi^2} \right)^{1/n}}{\left( \frac{k(n-2)}{(n-1)m_\chi^2 \kappa^2 \chi^2} \right)^{\frac{1-n}{n}}} \chi^2, \quad (1.100)$$

инфляцияның басындағы  $n > 2$  жағдайында өріс үшін  $\kappa\chi \gg 1$ :

$$3H^2 \approx 2^{\frac{1-n}{n}} (3n-4) \kappa^2 m_\chi^2 \left( \frac{k(n-2)}{(n-1)m_\chi^2 \kappa^2 \chi^2} \right)^{\frac{1-n}{n}} \chi^2.$$

Жоғарыдағы теңдеуді жеңілдету үшін  $n=3$  жағдайын қарастырсақ болады. Онда (1.91) теңдеуіндегі баяу сырғу параметрлері келесідей түрге келеді:

$$\varepsilon = \frac{5 \cdot 2^{4/3} m_\chi^2}{75k} \left( \frac{k}{m_\chi^2 \kappa^2 \chi^2} \right)^{\frac{1}{3}},$$

$$\eta = \frac{2^{7/3} m_\chi^2}{5k} \left( \frac{k}{m_\chi^2 \kappa^2 \chi^2} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (1.101)$$

Осы жағдайда  $e - \text{фолд}$  саны келесідей жазылады

$$N = \int_{t_i}^{t_{end}} H dt = -\kappa^2 \int_{\chi_i}^{\chi_{end}} \frac{U_{eff}}{U'} d\chi \approx \frac{15}{8 \cdot 2^{1/3}} \left( \frac{k}{m_\chi^2} \right)^{2/3} (\kappa^2 \chi_i^2)^{1/3}. \quad (1.102)$$

Демек, (1.101) теңдеуіндегі баяу сырғу параметрлерінен  $e - \text{фолд}$  санын келесідей анықтай аламыз:

$$\varepsilon = \frac{13}{10} \frac{1}{N}, \quad \eta = \frac{3}{2} \frac{1}{N}, \quad (1.103)$$

спектрлік индекс пен қисықтық тензорының скалярға қатынасы келесі мәндерге ие болады

$$n_s = 0.92, \quad r = 0.34. \quad (1.104)$$

Шын мәнінде, егер де  $n > 2$  болса, онда кез келген бүтін сан Планк миссиясынан алынған деректердегі бақылау шамасының мәндеріне сәйкес

келмейді. Дегенмен, жартылай бүтін сандар үшін болжамдар басқаша. Мұнда  $n > 2$  қарастыра аламыз, бұл жағдайда баяу сырғу параметрлері:

$$\varepsilon = \frac{3^{5/4} m_\chi^2}{4k} \left( \frac{k}{m_\chi^2 \kappa^2 \chi^2} \right)^{5/4}, \quad (1.105)$$

$$\eta = \frac{3^{5/4} m_\chi^2}{2k} \left( \frac{k}{m_\chi^2 \kappa^2 \chi^2} \right)^{5/4},$$

онда  $e - \text{фолд}$  келесі түрде анықталады

$$N = \frac{4}{5 \cdot 3^{5/4}} \left( \frac{m_\chi^2}{k} \right)^{1/4} (\kappa^2 \chi_i^2)^{5/4}. \quad (1.106)$$

Баяу сырғу параметрлері мен  $e - \text{фолд}$  саны арасындағы байланыс:

$$\varepsilon = \frac{1}{5} \frac{1}{N}, \quad \eta = \frac{2}{5} \frac{1}{N}, \quad (1.107)$$

егер  $N = 65$  деп алсақ, онда спекторлы индекс және қисықтық тензорының скалярға қатынасы төмендегі мәнге тең:

$$n_s = 0.98, \quad r = 0.05.$$

бұл Планк миссиясының алынған бақылау деректеріне, әсіресе тензордың скалярға қатынасы параметріне әлдеқайда жақсы сәйкес келеді. Демек, осы қарапайым модельде көрсетілгендей хаотикалық инфляция және күшті гравитациялық әсер, Палатини формализміне енгізілген түзетулер инфлатонның нақты моделінде маңызды рөл атқарады.

Сонымен, бұл тарауда Палатини формализміндегі  $f(R)$  гравитациясымен ерте Әлемнің ұлғаюының инфляциялық моделі зерттелді. Мұнда көрсетілгендей Палатини формализмінде, вакуумда немесе ізсіз материя болған кезде таралмайтын скаляр өрістің салдарынан  $f(R)$  әсері инфляцияның нақты моделін құру үшін жеткіліксіз, себебі, онда космологиялық тұрақтыны қосады, өйткені инфляция белгілі бір  $e - \text{фолд}$  мөлшерінен кейін аяқталуы керек. Демек, Әлемнің инфляциялық модельдерін құруды қарастырудың жалғыз жолы материяның болуын қарастыру, жалпы алғанда сәйкес потенциалы бар бірыңғай скаляр өріс болуы бұл ЖСТ-да анықталғанға ұқсас болады.



Соған қарамастан, гравитациялық әсерде Риччи скалярының сызықты емес функцияларының болуы Хаббл параметрінің өзгеруіне және инфлатон модификацияларын тудыратын тиімді потенциалға алып келеді. Мұнда Жордан координаттар жүйесінде жұмыс істей отырып, онда эффективті потенциалды анықтадық және баяу сырғу қозғалысын қарастырдық. Осы түрлендірулердің нәтижесінде сәйкес спектрлік индекс параметрі мен тензордың скалярға қатынасы параметрі де өзгереді, сондықтан инфляциялық потенциал ЖСТ-да және Палатини формализмінде бірдей мәнді бермейді. Көрсетілгендей, Планк миссиясынан анықталған шектеулерге сәйкес келмейтін бұл модельде сызықтық емес скаляр мүшесі, Риччи тензорын әсерде аздап өзгертеді, бұл спектрлік индекс параметрімен пен тензордың скалярға қатынасы параметрі үшін әлдеқайда жақсы болжамдарға алып келеді.

Демек, Палатини формализміндегі модификацияланған гравитация үшін баяу сырғу инфляциясы, ЖСТ контекстінде орындалмайтын кейбір модельдер үшін бақылау деректерін қанағаттандырады.

## 2 КҮҢГІРТ ЭНЕРГИЯНЫҢ КВИНТЭССЕНЦИЯ ПОТЕНЦИАЛЫН ГАУСС ПРОЦЕСІНДЕ РЕКОНСТРУКЦИЯЛАУ

Бұл тараудың негізгі мақсаты КЭ-ның квинтэссенциалды потенциалын модельге тәуелсіз реконструкциялау. Реконструкциялау бақылау деректерінен алынған қол жетімді ұлғаю жылдамдығына және Гаусс процесіне негізделген. Атап айтқанда, зерттеулерде екі әдіспен алынған  $H(z)$ -тің 40 мәнін қолдандық, мұнда 30 мән бақылау нүктесі дифференциалдық жас әдісімен, ал 10 мән бариондық-акустикалық осциллятор (BAO) бойынша радиалды әдісімен алынған. Нәтижелер екі ядро функциясы үшін, үш түрлі  $H_0$  Хаббл тұрақтысы мәнінде алынды. Олар квинтэссенциалды КЭ-мен сипатталған Әлемдегі  $H_0$  керілу мәселесін шешуге көмектеседі. Сондай-ақ мұндай керілу  $H_0$  статистикаға қатысты сандық мәселе емес, мәселені физикалық түсінумен байланысты екендігінің айқын белгісі. Сонымен қатар, мұнда реконструкциялаудан алынған модельдік тәуелсіз потенциалдар әртүрлі модельдердегі потенциалды шектеулердің алғышарты бола алады және жаңа космологиялық модельдерді құру үшін анықтамалық жүйе ретінде қолданылады. КЭ квинтэссенциясының модельдеріне тәуелсіз орындалатын  $V(\phi) \approx e^{\lambda\phi}$  потенциалы, реконструкциялаудан алынған КЭ-ның квинтэссенциясының потенциалдарының модельдермен салыстырылды. Бұл космология үшін қызықты болуы мүмкін жаңа модельдерді таңдауға мүмкіндік береді. Заманауи космология біздің алдын білген мәліметтерді модификациялау қажеттілігін көрсететін қызықты жағдайларға бай Әлем туралы ғылым. Осындай мәселелердің бірі болып  $H_0$  керілу мәселесі табылады, өйткені ол Хаббл тұрақтысы үшін [105, 106] ерте кезеңдегі Әлемнің эволюциясы (мысалы, ғарыштық микротолқынды фон (ҒМФ) мен BAO-ны зерттеу деректері) мен кейінгі кезеңдегі Әлемнің эволюциясы (мысалы, супернова типіне негізделген (SNe Ia) және  $H(z)$ ) арасында үлкен ауытқудың бар екенін көрсетеді. Бұл мәселені қалай шешуге болатыны туралы әртүрлі қызықты ұсыныстар бар [107-117].

Соңғы бірнеше жылда деректерді жинау, талдау және сақтау процесін жақсартуға көмектесетін маңызды технологиялық програмалар пайда болды. Бірақ кез-келген зерттеуде тікелей эксперименттер жасай алмай, қандай да бір мәселені шешу қиын. Сол сияқты, Әлемнің жаратылысын, құрлымын анықтауда тікелей эксперименттер жасалынбайды сондықтан нақты шешілмеген мәселе көп. Бұл кемшіліктер зерттеудің басқа салаларында да көрінеді, зерттеулер үшін ортақ нәрсе-барлық жағдайларда бізде кез келген мәселені мұқият шешу үшін өте озық технологиялық әзірлемелер бар сияқты көрінуі мүмкін. Алайда, неге бұрыннан келе жатқан кейбір мәселелерді шешуде айтарлықтай жетістіктерге жетпедік? Басқаша айтқанда, зерттеулерді салыстыру үшін белгілі бір модельге жүгінбестен тікелей бақылау деректерінен қорытынды жасауға бола ма? Кейбір осы сұрақтарға Машиналық оқыту әдістері арқылы жауап беруге болады. Машиналық оқыту әдісі қазіргі уақытта

зерттеудің ең танымал және қызықты бағыттарының бірі болып табылады. Машиналық оқыту әдісі келесі әрекеттерді орындауға тырысады: ол сұрақтардан басталмайды, керісінше жауаптармен эксперименттік деректер тұрғысынан бізде бар мәліметтерді түсіндіретін сұрақтарды (модельдерді) табуға мүмкіндік береді. Әр түрлі есептерді сәтті шеше алатындығын дәлелдеген түрлі оқыту алгоритмдерін машиналық оқытуға енгізу соңғы уақытта неге назар аударылғанын түсіндіреді. Сонымен қатар, жасанды интеллекттің артындағы ұзақ мерзімді зерттеулер әр түрлі проблемаларды, тіпті бақылауға немесе экспериментке тікелей тәуелді мәселелерді қалай жеңуге болатындығын көрсете бастады. Бұл әдеттен тыс естіледі және бұл процедуралардың қалай және неге жұмыс істейтінін түсіну үшін көп күш қажет.

Бұл тарау КЭ-ны және жалпы космологияны зерттеуге бағытталған. Біздің мақсатымыз Машиналық оқытудың белгілі бір әдісінің артықшылықтарын пайдалана отырып, модельдік тәуелсіз түрде КЭ-ның нақты үлгісін жасау [110, р. 890; 111, р. 44]. Атап айтқанда, бұл тарауда біз Гаусс процессінде (ГП) КЭ-сы бар Әлемнің квинэссенциалды моделін зерттейміз [112, р. 27; 113, р. 510]. Нақтырақ айтсақ, реконструкциялау негізінде алынған  $V(\phi) \approx \phi^\lambda [1 - \sin^n(\beta\phi)]$  потенциалы квинтэссенциалды КЭ-нің жаңа потенциалы түрі ретінде ұсынылды, бұл потенциал біздің білуімізше алдын еш жерде қолданылмаған. Сол сияқты  $V(\phi) \approx e^{-\lambda\phi}$ ,  $V(\phi) \approx \phi^\lambda$  және  $V(\phi) \approx \phi^\lambda [1 - \cos^n(\beta\phi^n)]$  модельдері де қарастырылды.

## 2.1 Күңгірт энергияның квинтэссенция потенциалын Гаусс процесінде реконструкциялауда қолданылатын әдістер мен модельдер

Квинтэссенциалды күңгірт энергияның потенциалын модельге тәуелсіз ГП-де реконструкциялау. Ол үшін бұған қалай қол жеткізуге болатындығы және қандай болжамдар қолданылатыны туралы кейбір мәліметтерді келтірейік. Фондық динамикадан бастап, ГП қолдану үшін қандай қадамдар жасау керектігін көрсетеміз.

ЖСТ-да материяның стандартты өрісі мен квинтэссенция өрісі болатын әсерді қарастырамыз ( $8\pi G = c = 1$ ):

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2} R - \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \right] + S_m, \quad (2.1)$$

мұнда  $\phi$  скалярлық өріс,  $V(\phi)$  потенциалдық энергия,  $S_m$  стандартты материя әсері,  $R$  кеңістіктің қисықтық скаляры (Риччи скаляры).

Сонымен қатар, ФРУ метрикасын қарастырамыз

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \sum_{i=1}^3 (dx^i)^2, \quad (2.2)$$

КЭ мен КМ-ның динамикасы және скалярлық өріс келесі теңдеулермен сипатталады

$$\dot{\rho}_\phi + 3H(\rho_\phi + P_\phi) = 0, \quad (2.3)$$

$$\dot{\rho}_{dm} + 3H\rho_{dm} = 0, \quad (2.4)$$

$$H^2 = \frac{1}{3}(\rho_m + \rho_{dm}). \quad (2.5)$$

Басқаша айтқанда (2.3), (2.4) және (2.5) теңдеулері Әлемнің ұлғаю динамикасын сипаттайды. Мұндағы  $P$  - қысым. Сонымен қатар  $\rho_\phi$ ,  $\rho_{dm}$  және  $P = P_\phi$  теңдігіне байланысты

$$\dot{H} + H = -\frac{1}{6}(\rho_\phi + \rho_{dm} + 3P_\phi). \quad (2.6)$$

Екінші жағынан, скаляр өрісті кеңістікте біртекті деп есептесек, оның энергия тығыздығы мен қысымы үшін бізде

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad (2.7)$$

$$P_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (2.8)$$

Мұндағы әріптің үстіндегі нүкте  $t$  уақыт бойынша туындысын білдіреді,  $V(\phi)$  скаляр өрісінің потенциалы. Жоғарыдағы барлық теңдеулердегі  $H = \dot{a}/a$  Хаббл параметрі болып табылады.

Қарапайым алгебралық есептеулерден кейін (2.7) және (2.8) теңдеулерінен келесі формуланы аламыз

$$\dot{\phi}^2 = \rho_\phi + P_\phi, \quad (2.9)$$

демек,

$$V(\phi) = \frac{\rho_\phi - P_\phi}{2}. \quad (2.10)$$

Екінші жағынан, (2.4) теңдеуінен  $\rho_{dm} = 3H_0^2\Omega_0(1+z^3)$  екенін ескеріп, (2.5) теңдеуден скаляр өрістің энергия тығыздығын анықтауға болады

$$\rho_\phi = 3H^2 - 3H_0^2\Omega_0(1+z^3), \quad (2.11)$$

мұнда  $H_0$  Хаббл параметінің  $z=0$  кездегі мәні (мысалы ол қазіргі уақыт; ал  $z$  қызыл ығысу). Жоғарыдағы (2.6) теңдеуді кейбір есептеулерден кейін келесі түрде қолдана аламыз

$$P_\phi = 2(1+z)HH' - 3H^2. \quad (2.12)$$

Мұнда әріптің үстіндегі штрих қызыл ығысу бойынша туындыны білдіреді. Сонымен қатар (2.9) және (2.10) теңдеулері мен (2.11) және (2.12) теңдеулерін бірге шеше отырып өрістің скалярлық потенциалының формасын,  $H$  және  $H'$  арқылы келесідей жазуға мүмкіндік береді

$$V(z) = 3H^2 - H'H(z+1) - \frac{3}{2}H_0^2\Omega_0(z+1)^3. \quad (2.13)$$

Ал, скаляр өріс үшін

$$\left(\phi(z)'\right)^2 = \frac{2H'H - 3H_0^2\Omega_0(z+1)^2}{(1+z)H^2}, \quad (2.14)$$

егер,  $H(z)$  және  $H'(z)$  белгілі болса, онда  $V(\phi)$  потенциалды реконструкциялауды аяқтауға мүмкіндік береді.

Енді (2.13) және (2.14) теңдеулерінен модельге тәуелсіз  $V(\phi)$  потенциалды реконструкциялауға болады.

Алдымен, ГП дегеніміз-бұл кездейсоқ процесс (уақыт немесе кеңістік координаттары бойынша индекстелген кездейсоқ шамалар жиынтығы), осылайша осы кездейсоқ шамалардың әрбірі ақырлы жиынтығы көп өлшемді қалыпты үлестірімге ие болады. ГП-і қамтитын Машиналық оқыту алгоритмі оқу деректеріне негізделген көрінбейтін нүктенің мәнін болжау үшін *жалқау оқытуды* және нүктелер арасындағы ұқсастық өлшемін (ядро функциясын) пайдаланады.

ГП-ның артықшылығы – сенімділік аралықтарын белгілеу және гиперпараметрлерді орнату үшін қолданылатын болжамдардың толық шартты статистикалық сипаттамасын беру. Берілген бақылаулар жиынтығы үшін ол тәуелсіз және тәуелді айнымалылар арасындағы байланысты анықтай алады. Бұл жағдайда Байес құралдары деп ортаңғы және коварианттық матрицаның функцияларымен сипатталатын және функциялар бойынша үлестіруді түсіну керек. Өкінішке орай, әдістің кемшіліктерінің бірі, ядроны таңдау тұрақты процесс емес. Тек жақсы ойластырылған деректер мен шешілетін тапсырманың түрі қай ядроның жақсы жұмыс істейтінін көрсете алады. Ковариация функциясының бірқатар мүмкін нұсқалары бар: квадраты экспоненциалды,

көпмүшелік, сплайн және т.б. Басқаша айтқанда, реконструкциялау кездейсоқ емес екеніне көз жеткізу үшін әрқашан бірнеше ядроларды қарастырып, нәтижелерді салыстыру ұсынылады. Бұл өте маңызды және бұл аспектке байыпты қарамау жаман салдары бар жаңылыстыратын нәтижелерге әкелуі мүмкін. Космологияда біз салыстырмалы түрде шағын деректер жиынтығымен айналысамыз, сондықтан қарастырылып отырған ядролардың санын едәуір азайтуға мүмкіндік беретін қайта құру процесін әрдайым байқауға болады. Бұл космологияда тек екі немесе үш ядроға әсер ететін зерттеулерді табудың себептерінің бірі. Атап айтқанда, космологияда ең белсенді қолданылатын ядролардың бірі экспоненциалды функцияның квадраты болып табылады:

$$k(x, x') = \sigma_f^2 \exp\left(-\frac{(x - x')^2}{2l^2}\right), \quad (2.15)$$

мұнда  $\sigma_f$  және  $l$  гиперпараметрлер ретінде белгілі.  $l$  параметрі  $f(x)$  дәйекті мәндері корреляцияланатын корреляция ұзындығын білдіреді процесстің орташа мәніне қатысты  $f(x)$  өзгерісін басқару үшін бізге  $\sigma_f$  параметрі қажет. Екінші жағынан, экспоненциалды функцияның квадраты шексіз дифференциалданады, бұл жоғары ретті туындылар қарастырылған жағдайда пайдалы қасиет. Соңғы уақытта басқа ядролар, соның ішінде ковариациялық функция деп аталатын Матерна ( $\nu = 9/2$ ), жақсы нәтижелер көрсетуде, яғни:

$$k(x, x') = \sigma_f^2 \exp\left(-\frac{3|x - x'|}{l}\right) \times \left[1 + \frac{3|x - x'|}{l} + \frac{27(x - x')^2}{7l^2} + \frac{18|x - x'|^3}{7l^3} + \frac{27(x - x')^4}{35l^4}\right], \quad (2.16)$$

Осы критерийге сүйене отырып, сонымен бірге экспоненттің квадратты (2.15) теңдеуі және Матренді ( $\nu = 9/2$ ) (2.16) теңдеуді қарастырып келесі шамаларды түсінуге мүмкіндік аламыз:

- а)  $V(\phi)$  потенциалды реконструкцияға қалай әсер етуі мүмкіндігі;
- ә) бұл қолданыстағы  $V(\phi)$  потенциалдық шектеулерге қалай әсер етуі мүмкіндігі.

Айта кету керек, көптеген нақты жағдайлар қарастырылды, бірақ мұнда ұсынылған  $V(\phi)$  потенциалдың реконструкциясы барлық қолданыстағы модельдерді реконструкциялау үшін жеткілікті.

Енді ядро функциялары туралы сұраққа жауып ретінде, төменде келесі мәселелерді талқылаймыз: біріншіден бақылау деректері, екіншіден қолданатын құралдар.

Атап айтқанда, пайдаланылған деректер радиалды ВАО әдісімен алынған 10 нүктелік үлгілерден басқа, дифференциалдық жас әдісімен алынған 30 нүктелік үлгілерден тұратын 1-кестеде берілген Әлемнің ұлғаюының жылдамдығының мәндері болып табылады. Мұнда қызыл ығысудың  $z \in [0, 2.4]$  диапазонын қамтитын 40 деректер нүктесін қолданамыз. Біздің талдауымыздың  $H_0$  мәні  $z=0$  мәніне қатысты, реконструкциялау кезінде біз үш түрлі жағдайды қарастырамыз:

1.  $H_0$  Хаббл тұрақтысы  $H(z)$  және  $H'(z)$  реконструкциясы кезінде Әлемнің ұлғаю жылдамдығына сәйкес бағаланады;

2.  $H_0$  Хаббл тұрақтысы, Планк миссиясынан алынған (the Planck Mission) мәнінде және реконструкциялау формасы  $H'(z)$  және  $H(z)$  жасалады;

3.  $H_0$  Хаббл тұрақтысы, Хаббл миссиясынан алынған (the Hubble Mission) және реконструкциялау формасы  $H'(z)$  және  $H(z)$  арқылы жасаймыз.

Мұның себебі, ең тиімді потенциалды реконструкциялаудың тәуелсіз моделін қолдану, егер жоғарыда сипатталған стратегияны ұстанатын болсақ, сол потенциалдың қандай формалары мәселені шешуге мүмкіндік беретінін көрсете аламыз. Мұнда жалпыға қол жетімді Rayton бағдарламасындағы Гаусс процессінің, Seikel пакетті қолданатынымызды атап өткен жөн [61]. Бұл әр түрлі ковариациялық функцияларды таңдауға мүмкіндік беретін өте қарапайым және өте қанағаттанарлық бағдарламалық пакет.

## 2.2 Күңгірт энергияның квинтэссенция потенциалын Гаусс процесінде реконструкциялауда алынған нәтижелер мен талқылаулар

Жоғарыда айтылғандай, осылайша  $H_0$  керілу мәселесін қалай шешуге болатындығы және шешімге жету үшін белгілі бір модель параметрлеріне қандай шектеулер бар екендігі туралы мәліметтер бере аламыз. Сонымен қатар, талдау жасауда (2.15) және (2.16) теңдеулерімен берілген екі ядро функциясын қолданатынымызды ескеріп кеткен жөн.

Алдыңғы бөлімде қарастырылмаған маңызды мәселе (2.14) теңдеумен қалай жұмыс жасау, өйткені (2.14) теңдеуді жеңілдетіп қайта жазамыз.

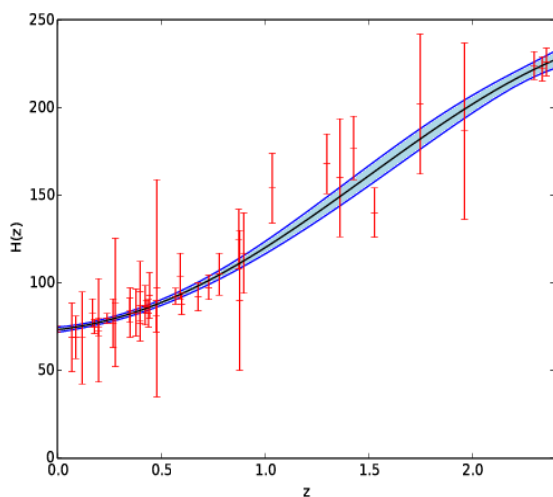
$$\phi(z_i)' \approx \frac{\phi(z_i + \Delta z) - \phi(z_i)}{\Delta z}, \quad (2.17)$$

мұнда  $\Delta z = z_{i+1} - z_i$  қызыл ығысудың өзгерісі, ол үшін  $H(z)$  және  $H'(z)$  реконструкцияланған. Жоғарыдағы (2.13), (2.14) және (2.17) теңдеулері Әлемнің КЭ-сының квинтэссенциясын сипаттайтын  $V(\phi)$  потенциалды модельдік тәуелсіз реконструкциялауға мүмкіндік беретіні анық (1-кесте). Ыңғайлы болу үшін нәтижелерімізді үш бөлімге бөлеміз.

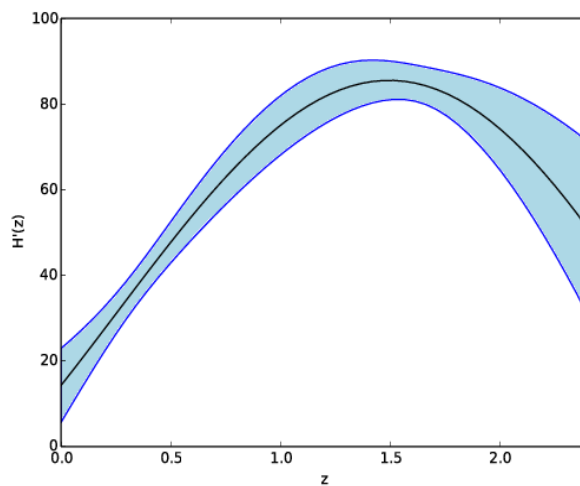
Екі әдіспен алынған  $H(z)$ -тің 40 мәнін үлгісі мұнда 30 мән жас дифференциалдық әдісімен, ал 10 мән ВАО бойынша радиалды әдісімен алынған. Бұл [114, р. 254] жұмысқа сәйкес келеді және 1-суретте көрсетілген.

Кесте 1 – Әлемнің ұлғаю жылдамдығы туралы мәліметтер

$z$	$H(z)$	$\sigma_H$	$z$	$H(z)$	$\sigma_H$
0.070	69	19.6	0.4783	80.9	9
0.090	69	12	0.480	97	62
0.120	68.6	26.2	0.593	104	13
0.170	83	8	0.680	92	8
0.179	75	4	0.781	105	12
0.199	75	5	0.875	125	17
0.200	72.9	29.6	0.880	90	40
0.270	77	14	0.900	117	23
0.280	88.8	36.6	1.037	154	220
0.352	83	14	1.300	168	17
0.3802	83	13.5	1.363	160	33.6
0.400	95	17	1.4307	177	18
0.4004	77	10.2	1.530	140	14
0.4247	87.1	11.1	1.750	202	40
0.44497	92.8	12.9	1.965	186.5	50.4
0.24	79.69	2.65	0.60	87.9	6.1
0.35	84.4	7	0.73	97.3	7.0
0.43	86.45	3.68	2.30	224	8
0.44	82.6	7.8	2.34	222	7
0.57	92.4	4.5	2.36	226	8



а



ә

а – керілу параметрінің қызыл ығысуға қатысты графигі; ә – керілу парметірінің қызыл ығысу бойынша өзгеруі

Сурет 1 –  $H_0 = 73.52 \pm 1.62 \text{ кмс}^{-1} \text{ Мпк}$  мәні үшін  $H(z)$  және  $H'(z)$  функцияларының графигі

Хаббл миссиясынан  $H_0 = 73.52 \pm 1.62 \text{ кмс}^{-1} \text{ Мпк}$  алынған мән үшін, 30 мән дифференциалдық жас әдісімен және ВАО радиалды әдісімен алынған 10 мән



үлгіде  $H(z)$  және  $H'(z)$  функцияларын ГП бойынша реконструкциялаудан алынған график.

### 2.2.1 Бекітілмеген $H_0$ үшін, $V(\phi)$ потенциалды реконструкциялау

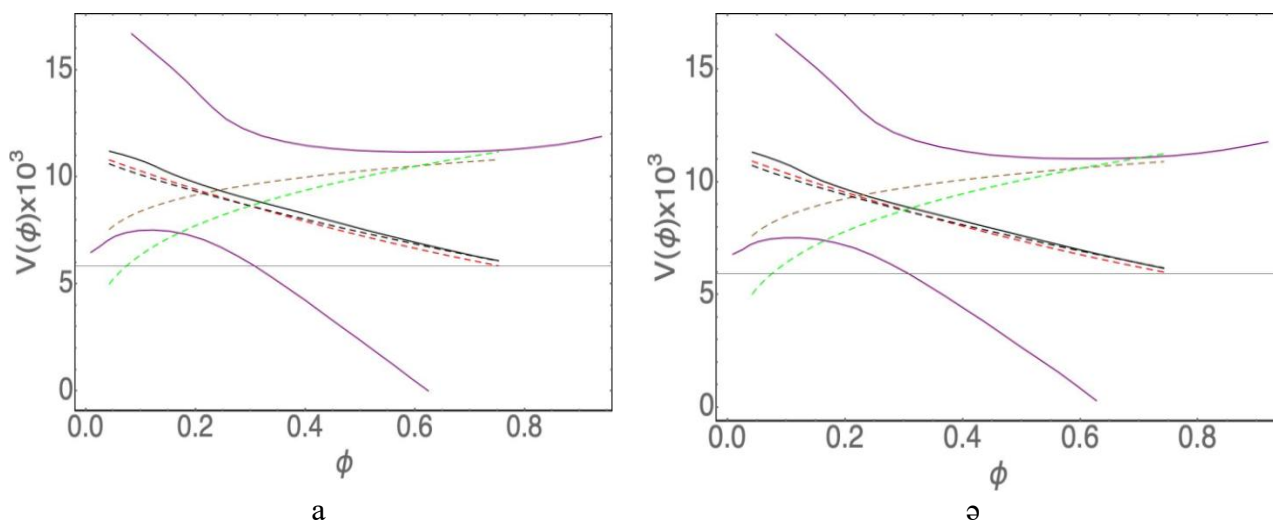
Бірінші жағдай  $H_0$  бекітілмеген жағдайдағы реконструкциялауға сәйкес келеді. Бұл жағдайда ГП-ін және Әлемнің ұлғаю жылдамдығы туралы мәліметтерді пайдалана отырып 1-кестедегідей,  $H_0$ -ді алдымен реконструкция процесінде бағалаймыз, ол ядро (2.15) теңдеуімен берілген кезде  $H_0 = 71.286 \pm 3.743 \text{ кмс}^{-1} \text{ Мпк}$  тең болады. Ал ядро (2.16) формуласымен берілгенде  $H_0 = 71.196 \pm 3.867 \text{ кмс}^{-1} \text{ Мпк}$  шамасыны тең болады.

Содан кейін (2.13) және (2.14) ((2.17) теңдеуімен бірге) теңдеулердегі  $H(z)$  және  $H'(z)$  мәндерін қолдана отырып, модельден тәуелсіз  $V(\phi)$  потенциалды реконструкция жасаймыз.  $V(z)$  потенциалы мен  $\phi(z)$  өрістің модельден тәуелсіз реконструкцияланған формаларын 2-суретте көрсетілген түрде анықтаймыз. Ал  $H_0$  параметрі үшін бағалау қателігі Планк және Хаббл миссияларының қателерінен едәуір көп екенін байқалады. Айта кету керек,  $V(\phi)$  потенциалы үшін осы жоғарғы және төменгі ауытқулардың нәтижесінде бұл жағдай басқа екі жағдайдан айтарлықтай өзгеше болады. Әлбетте, бұл Әлемнің эволюциясының алғашқы кезеңіндегі квинтэссенциалды КЭ моделінің сипатталуына әсер етуі мүмкін.

Енді реконструкция нәтижелеріне тоқталамыз. Бір қарағанда, реконструкция сәтті болды. Алайда, тиісті нәтижелерді түсіну және растау үшін біз реконструкцияланған модельді сипаттайтын басқа физикалық шаманы қарастыруымыз керек. Мүмкін, көптеген зерттеулерде көрсетілгендей, қарастырылып отырған модель бақылау деректерінің сапасына байланысты қабылданбайды немесе қызыл ығысудың белгілі бір мәніне дейін ғана жарамды болуы мүмкін. Сондықтан біздің жағдайда модельдің әділдігіне қаншалықты сені алатынымызды түсіну маңызды.

Осы мақсаттар үшін салыстырмалы тығыздық  $\Omega_{de} = \rho_\phi / 3H^2$  физикалық шамасын таңдаймыз, ол  $z=0$ -де  $\phi(z=0)$ -ді бағалау үшін де қолданылды. Салыстырмалы тығыздық  $\Omega_\phi$  реконструкциялау нәтижелеріне сәйкесінше (2.15) және (2.16) теңдеулерімен берілген екі ядро үшін 6-суреттен көруге болады. Шынында да, реконструкциялаудың кейбір қызыл ығысуларға дейін сәтті болғанын көреміз, бұл жоғары мәндер үшін модельді қабылдамау керек екенін көрсетеді, өйткені  $\Omega_{de}$  үшін  $2\sigma$ -нің төменгі шегі теріс болады. Дұрыс түсіну үшін бүкіл *суретті* қарастыруымыз керек, бұл жағдайда  $V(z)$  және  $\phi(z)$  шамаларын реконструкциялау қызыл ығысуға дейін қолайлы екенін көрсетеді. Осыны ескере отырып, зерттеуді жалғастырып және  $V(z)$  және  $\phi(z)$ —қайта реконструкциялауда орташа мәндерін қолдана отырып,  $V(\phi)$  орташа мәнін тікелей реконструкцияладық.

Екінші жағынан,  $V(z)$  және  $\phi(z)$  функциясын реконструкциялау кезінде  $2\sigma$  қатесінің төменгі және жоғарғы шекараларын қолдана отырып,  $V(\phi)$  үшін мүмкін болатын максималды қателерді анықтадық, бұл мәселені шешуге мүмкіндік берді, бұл реконструкциялау  $V(\phi)$  потенциалын моделден тәуелсіз алуға мүкідік береді, КЭ-ның квинтэссенциясын біздің ұлғайып жатқан Әлемнің қозғаушы күші ретінде сипаттайды. Нәтижесінде 2-суретті алуға болады, онда сол жақ график (2.15) ядро теңдеумен берілген кезде, ал оң жақ бөлігі (2.16) теңдеуімен берілген ядроға қатысты тұрғызылған.



а – өріс потенциалының скаляр өріске қатысты графигі (2.15) теңдеу үшін тұрғызылған; ε – өріс потенциалының скаляр өріске қатысты графигі (2.16) теңдеу үшін тұрғызылған;

Сурет 2 –Хаббл тұрақтысы  $H_0 = 71.286 \pm 3.743 \text{ кмс}^{-1} \text{ Мпк}$  болғандағы, әртүрлі потенциалдар үшін графигтер

Бірінші кестеде Әлемнің ұлғаю жылдамдығы туралы берілген деректерді пайдалана отырып  $H_0 = 71.286 \pm 3.743 \text{ кмс}^{-1} \text{ Мпк}$  болған жағдай үшін ГП-інде  $V(\phi)$  потенциалдың реконструициясы.

Жоғарыдағы графигтерде қара қисық сызық реконструкцияланған орташа мәнге сәйкес  $V(\phi)$  потенциалының графигі. Күлгін қисықтар төменгі және жоғарғы шекаралар қателіктеріне сай келетін графигтер. Қызыл нүктелі қисық  $V(\phi) \approx e^{-\lambda\phi}$  потенциалы бар квинтэссенциялы КЭ моделін білдіреді. Қоңыр штрих  $V(\phi) \approx \phi^\lambda$ , қара штрих  $V(\phi) \approx \phi^\lambda [1 - \sin^n(\beta\phi)]$  және жасыл штрих  $V(\phi) \approx \phi^\lambda [1 - \cos^n(\beta\phi^n)]$  қисықтар квинтэссенциалды КЭ моделіне сәйкес келетін графигтер. Сол жақтағы графиг (2.15) ядро теңдеумен берілген кезде реконструкция нәтижесі болып табылады, ал оң жақ бөлігі теңдеумен (2.16) берілген ядро үшін тұрғызылған графигі.

2-суретте әртүрлі модельдерді реконструкциялау арқылы қалай салыстыруға және шектеулер қоюға болатындығы көрсетілген. Атап айтқанда, мұндағы нәтижелерімізден, 2-суреттің сол жағындағы графигтен ядро (2.15)

теңдеуімен берілген кезде, КЭ-ның потенциалы  $V(\phi) \approx e^{-\lambda\phi}$  (қызыл нүктелі қисық, егер  $\lambda = 0.854$ ) квинтэссенция моделі ең табысты болып табылады. Екінші жағынан, біз сондай-ақ КЭ-ның  $V(\phi) \approx \phi^\lambda [1 - \cos(\beta\phi^n)]$  квинтэссенциалды моделі (мысалы,  $\beta = 1.65, n = 0.05, \lambda = 0.2$  мәндерімен берілген графиктегі нүктелі жасыл қисық сызық) эксперимент деректеріне сай келмейтінін көруге болады. Сонымен қатар, Әлемнің ұлғаю жылдамдығы туралы қолда бар мәліметтерге сәйкес,  $V(\phi) \approx \phi^\lambda$  потенциалға тең модельді терең зерттеуге болатынын көруге болады (штрих-қоңыр қисық  $\lambda = 0.125$ ) және ол  $V(\phi) \approx \phi^\lambda [1 - \cos(\beta\phi^n)]$  моделіне қарағанда бақылау деректеріне үйлесімді болады. Мұны 2-суретте графиктегі нүктелі қоңыр қисықтар көрсетеді.

Ұсынылған талқылаудан кез-келген модельді талдауға болатындығы және параметрлерге тиісті шектеулерді табуға болатындығы айқын болады. Жоғарыда бұрыннан бар модельдердің кейбірін талқыладық және модельге тәуелсіз талдаудан алынған нәтижелеріміз кейбіреулердің неге жұмыс істейтінін, ал басқаларын қабылдамау керектігін тереңірек түсінуге мүмкіндік береді. Белгілі бір потенциалы бар кейбір КЭ модельдері  $H_0$  керілу мәселесін шешуге неге сәйкес келмейтіні көрсеттік.

Осыны аяқтамас бұрын және реконструкциялау нәтижелеріне сүйене отырып, біз квинтэссенциалды КЭ-ның моделін сипаттайтын потенциалдың жаңа түрін ұсынамыз. Біздің білуімізше, бұл нақты модель бұрын қарастырылмаған.

$$V(\phi) \approx \phi^\lambda [1 - \sin^n(\beta\phi)] \quad (2.18)$$

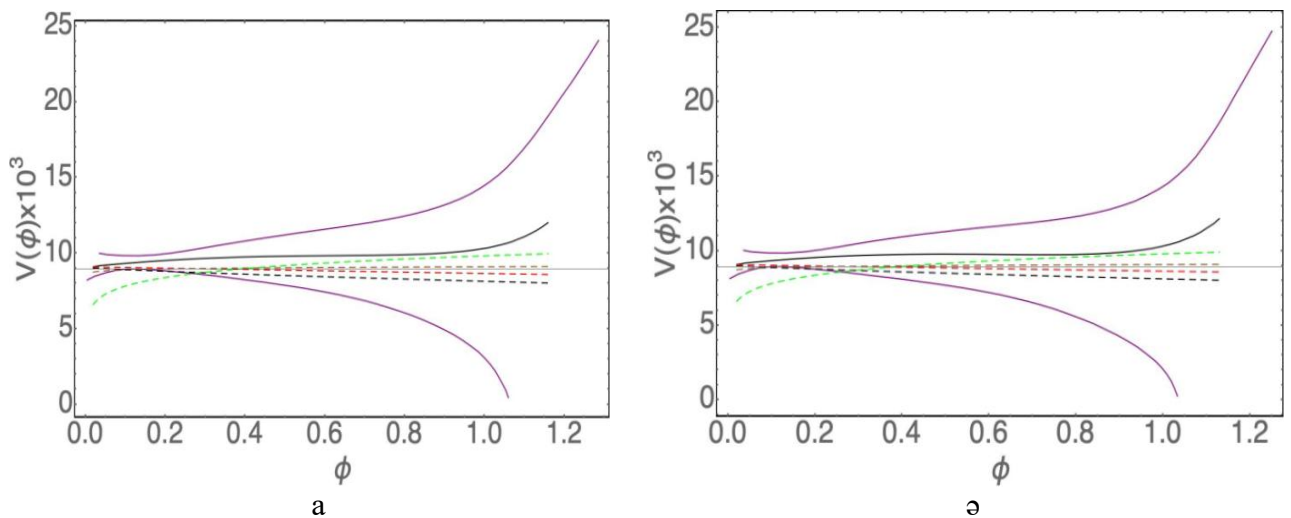
мұнда  $\lambda, n$  және  $\beta$  шамалары еркін таңдалатын параметрлер. Бұл модельге сәйкес келетін  $\lambda = 0.001, \beta = 0.5, n = 0.5$  болғанда 2-суреттегі қара штрих график ол реконструкцияланған орташа мәннің гафигімен бірдей екенін ядро (2.15) теңдеуімен берілген кезде көруге болады. Қорытындылай келе, (2.16) ядроны қарау жоғарыда қарастырылған параметрлердің сандық мәндеріне шамалы ғана әсер ететін өзгерістер енгізетінін атап өтеміз. Алайда, жалпы көрініс пен тұжырымдар өзгеріссіз қалады.

2.2.2  $H_0 = 67.40 \pm 0.5 \text{ км с}^{-1} \text{ Мпк}$  болғанда,  $V(\phi)$  потенциалдың реконструкциясы

Бұл бөлімде  $H_0$  параметрінің нақты мәні алдын-ала жазылған кезде  $H(z)$  және  $H'(z)$  реконструкциясы орындалған жағдайды талқылаймыз. Алдыңғы жағдайдан айырмашылығы, реконструкция мұнда 41 деректер нүктесіне негізделген. Нақтырақ болу үшін, бұл жағдайда  $H_0$  мәннің орнына Планк миссиясынан алған мәнді қолданып көрейік. Алдыңғы жағдайдағыдай, реконструкция дұрыс болатын қызыл ығысу диапазонын анықтауға мүмкіндік беретін салыстырмалы тығыздық  $\Omega_{de} = \rho_\phi / 3H^2$  тағы да қарастырылды. Атап

айтқанда, (2.15) теңдеуімен берілген квадратты экспоненттік ядроны қарастырғанда, қызыл ығысу  $z \in [0, 2)$  диапазоны физикалық тұрғыдан реконструкциялауға қолайлы функцияны  $V(z)$  және  $\phi(z)$  қамтамасыз ететіндігі анықталды. Сонымен қатар, (2.16) теңдеу Матерна ( $\nu = 9/2$ ) ядроны қарастырған кезде физикалық тұрғыдан қолайлы  $V(z)$  және  $\phi(z)$  функциялар реконструкцияны қамтамасыз ететін қызыл ығысу  $z \in [0, 1.91)$  диапазонында тұрғызылған (8-сурет). Екінші жағынан, жоғарғы панельден (7-сурет) потенциал мен өрістің реконструкциясы (2.15) теңдеуімен берілген жағдай үшін, ал ядро (2.16) теңдеуімен берілген нәтижелерін төменгі панельден табуға болады (7-сурет).

Мұнда  $V(\phi)$  потенциалының орташа мәнін реконструкция үшін  $V(z)$  және  $\phi(z)$  мәндерінің орташа мәндері қолданылды. Сонымен қатар,  $V(z)$  және  $\phi(z)$  функцияларының мәндерін реконструкциясы екеуінің де төменгі және жоғарғы қателік шекараларын қолдана отырып,  $2\sigma$  үшін мүмкін болатын максималды қателіктері анықталды (3-суреттегі күлгін қисық), бұл бізге ұлғайып жатқан Әлемнің КЭ-ның квинтэссенциясын сипаттайтын  $V(\phi)$  потенциалдарының модельден тәуелсіз реконструкциясын аяқтауға мүмкіндік берді. Реконструкция нәтижелерін 3-суреттен көруге болады, мұнда сол жақ график ядро (2.15) теңдеуімен берілген кездегі нәтижені білдіреді, ал оң жақ бөлігі (2.16) теңдеуімен берілген ядроға сәйкес келеді.



а – өріс потенциалының скаляр өріске қатысты графигі (2.15) теңдеу үшін; ə – өріс потенциалының скаляр өріске қатысты графигі (2.16) теңдеу үшін;

Сурет 3 – Потенциалды  $V(\phi)$  реконструкция 1-кестедегі ұлғаю жылдамдығы деректері және  $H_0 = 67.40 \pm 0.5 \text{ км с}^{-1} \text{ Мпк}$  мәні үшін жасалынды.

Ескерту – Планк миссиясының мәліметтері бойынша жасалған

2-суретте және 3-суретте көрсетілген нәтижелер визуалды

Осы мысалдардың барлығында ядро (2.15) теңдеуімен берілген. Егер (2.16) теңдеуді қолдана отырып біздің алған нәтижеден талдау жасасақ, айта

кету керек реконструкцияның бұл жерде алдыңғы жағдайға қарағанда модель параметрлеріне қатаң шектеулер болатынын көрсетеді. Реконструкция кезінде анықталған ең маңызды аспект бұл Әлемнің эволюциясының алғашқы кезеңіндегі модельдердің құрлымы айтарлықтай өзгеруі мүмкін. Бұл  $H_0$  керілу тек сандармен ойнаудың нәтижесі емес екенін көрсетеді.

Қара қисық реконструкция нәтижесінде алынған  $V(\phi)$  потенциал реконструкцияланған орташа мәндерден алынған  $V(z)$  және  $\phi(z)$  орташа мәнін білдіреді. Күлгін қисықтар төменгі және жоғарғы қателік шекаралары  $2\sigma$  реконструкцияланған  $V(z)$  және  $\phi(z)$  екі функциясы үшін мүмкін болатын максималды қателік шекараларын анықтау үшін де қолданылды. Қызыл нүктелі қисық  $V(\phi) \approx e^{-\lambda\phi}$  квинтэссенциал КЭ-ның потенциалы моделіне сәйкес келеді. Қоңыр штрих қисық  $V(\phi) \approx \phi^\lambda$ , нүктелі қара  $V(\phi) \approx \phi^\lambda [1 - \sin^n(\beta\phi)]$  және нүктелі жасыл  $V(\phi) \approx \phi^\lambda [1 - \cos(\beta\phi^n)]$  қисықтар КЭ моделінің квинтэссенциясын білдіреді. Сол жақ графикте ядро (2.15) теңдеуімен берілген кезде реконструкция нәтижесі көрсетілген, ал оң жақ бөлігі (2.16) теңдеуімен берілген ядроға қатысты.

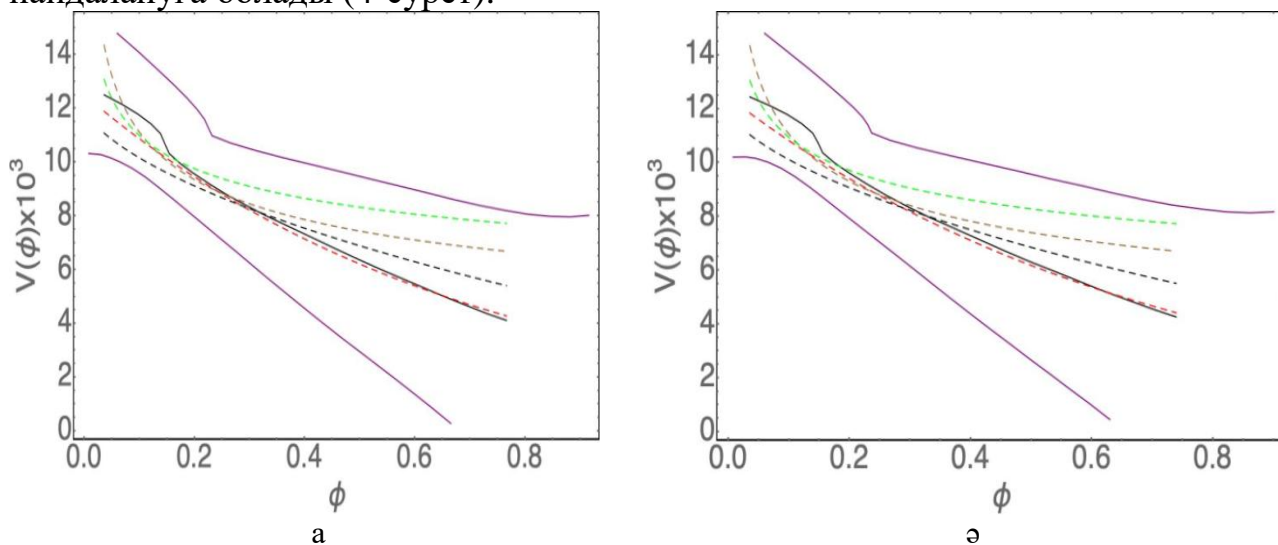
2.2.3  $H_0 = 73.52 \pm 1.62 \text{ км с}^{-1} \text{ Мпк}$  болғанда,  $V(\phi)$  потенциалдың реконструкциясы

Енді біз  $H_0$  Хаббл миссиясының деректеріне сәйкес келетін  $H_0 = 73.52 \pm 1.62 \text{ км с}^{-1} \text{ Мпк}$  мәнінде алынған шама үшін мысалды қарастырамыз. Бұл дегеніміз, екінші мысалға ұқсас,  $H(z)$  және  $H'(z)$  реконструкция деректерінің 41 нүктесіне негізделеді, алынған  $z \in [0, 2.4]$  диапазонындағы  $V(z)$  және  $\phi(z)$  мәндерінің графиктері 9-суретте келтірілген. Ал (2.15) теңдеуімен берілген квадратты экспонент ядросының алынған шешім 4-суретте оң жақта және (2.16) теңдеуімен берілген жағдай үшін шешім сол жағында тұрғызылған графикке сәйкес келеді.

Реконструкция негізінде алынған потенциалдарды космологияда зерттеу жұмыстарында қолдануға болады. Атап айтқанда,  $V(\phi)$  потенциалының реконструкциясы орташа мәніне сәйкес  $V(\phi) \approx e^{-\lambda\phi}$  тең, мұндағы  $\lambda = 1.4$  мәні космологиялық модельдер үшін пайдалы. Екінші жағынан  $V(\phi) \approx \phi^\lambda$  потенциалы бар модельді  $\lambda = -0.25$  шартымен ұсынуға болады. Сонымен қатар,  $\beta = 1.75, n = 0.05$  және  $\lambda = -0.25$  болғанда,  $V(\phi) \approx \phi^\lambda [1 - \sin^n(\beta\phi)]$  потенциалы бар модель космологиялық қосымшалар үшін де қолайлы екенін анықталды. Сонымен,  $V(\phi) \approx \phi^\lambda [1 - \cos(\beta\phi^n)]$  моделі  $\beta = 1.75, n = 0.05$  және  $\lambda = -0.25$  шартымен де қолайлы. Осы мысалдардың барлығында ядро (2.15) теңдеуімен берілген. (2.16) теңдеу ядросын қолдана отырып талдау ұқсас ұсыныстарды да жасауға болатындығын көрсетеді. Сонымен қатар, реконструкция нәтижелері модель параметрлеріне шектеулер алдыңғы бөлімде қарастырылғаннан қарағанда қатаң болмайтынын көрсетеді. Екінші жағынан, Әлемнің эволюциясының алғашқы кезеңіндегі модельдердің табиғаты айтарлықтай өзгеруі мүмкін.

Реконструкция дұрыс болатынын  $\Omega_{de} = \rho_\phi / 3H^2$  қызыл ығысу диапазонын анықтау үшін 4б-суретте қайта қаралды.

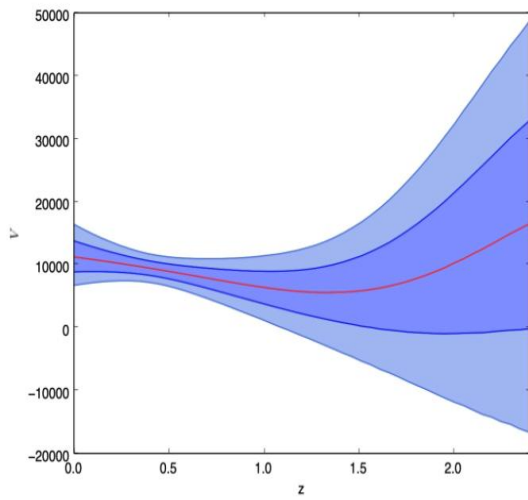
Осы бөлімнің соңында, жоғарыда келтірілген модельдер үшін параметрлердің мәндері жоғарыда талқыланған потенциалдардың формаларының бірі болған кезде КЭ басым болатын квинтэссенциалды Әлемнің  $H_0$  керілу мәселесін шешуге болатындығын көреміз. Тағы бір айта кететін жайт, мұнда алынған реконструкциялар модельдерге толығымен тәуелсіз және ұлғаю жылдамдығы туралы мәліметтерге негізделген. Оларды жаңа модельдер жасау үшін немесе бұрыннан белгілі модельдерді шектеу үшін пайдалануға болады (4-сурет).



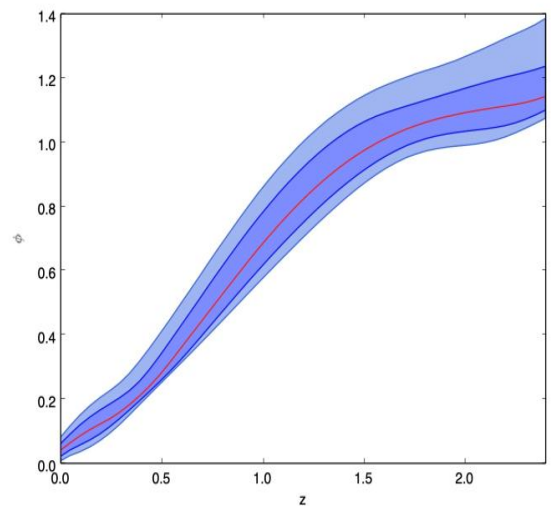
а – өріс потенциалының скаляр өріске қатысты графигі (2.15) теңдеуіне сәкес келеді;  
 ә – өріс потенциалының скаляр өріске қатысты графигі (2.16) теңдеуіне сәкес келеді;

Сурет 4 –Хаббл миссиясының мәліметтері сәйкес  $H_0 = 73.52 \pm 1.62 \text{ км с}^{-1} \text{ Мпк}$  келетін  $V(\phi)$  потенциалдарының реконструкциясы

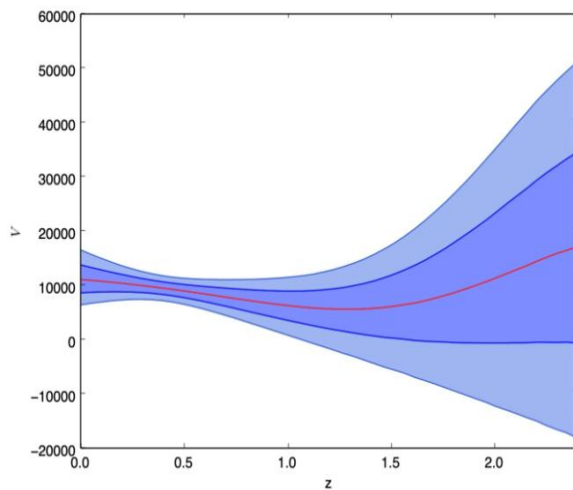
Бұл графиктерде қара қисық сызық реконструкция нәтижесінде алынған  $V(\phi)$  потенциалының реконструкцияланған орташа мәндерден алынған  $V(z)$  және  $\phi(z)$  орташа мәнін білдіреді. Күлгін қисықтар төменгі және жоғарғы қателік шекаралары  $2\sigma$  реконструкцияланған  $V(z)$  және  $\phi(z)$  екі функциясы үшін мүмкін болатын максималды қателік шекараларын анықтау үшін де қолданылды. Қызыл нүктелі қисық квинтэссенциал күнгірт энергияның потенциалы  $V(\phi) \approx e^{-\lambda\phi}$  моделіне сәйкес келеді. Қоңыр штрих қисық  $V(\phi) \approx \phi^2$ , нүктелі қара  $V(\phi) \approx \phi^2 [1 - \sin^n(\beta\phi)]$  және нүктелі жасыл  $V(\phi) \approx \phi^2 [1 - \cos(\beta\phi^n)]$  қисықтар квинтэссенциалды КЭ модельін білдіреді. Сол жақ графикте ядро (2.15) теңдеуімен берілген кезде реконструкция нәтижесі көрсетілген, ал оң жақ бөлігі (2.16) теңдеуімен берілген ядроға қатысты график берілген (5-сурет).



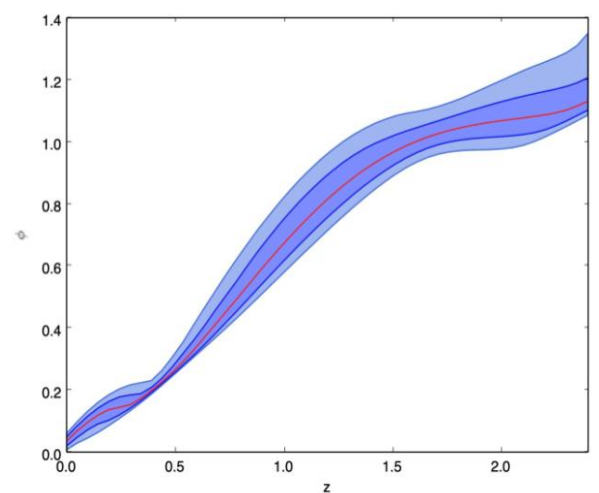
а



ä



б



в

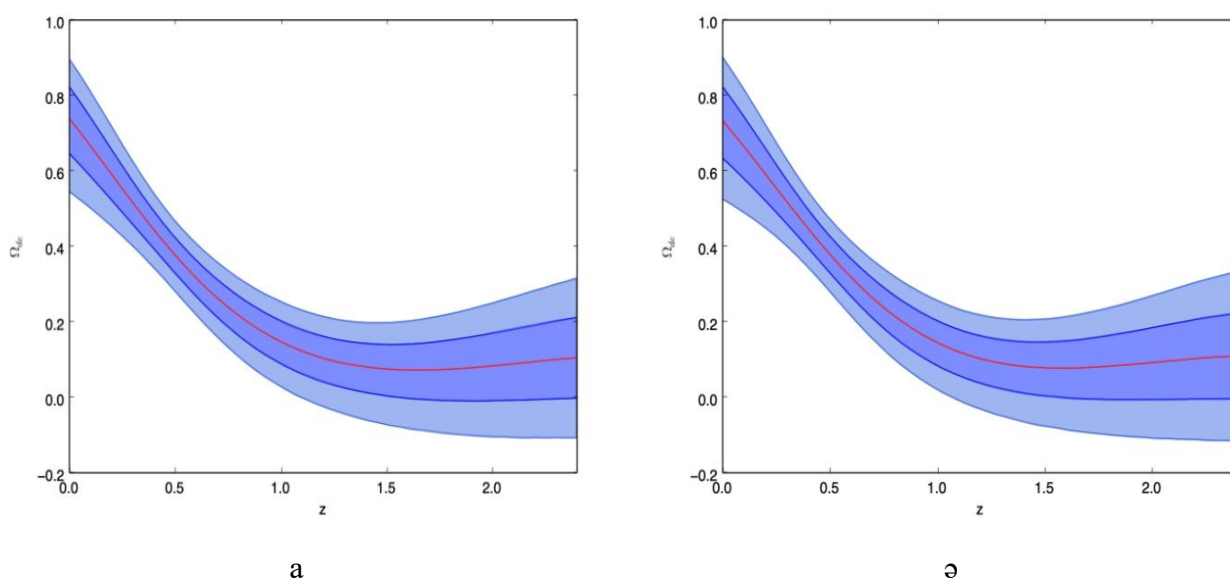
а – Хаббл параметрі реконструкциядан алынған жағдай үшін (2.14) теңдеуді қолданып тұрғызылған графигі; ä – Хаббл параметрі реконструкциядан алынған жағдай үшін (2.13) теңдеуді қолданып тұрғызылған графигі; б – Хаббл параметрі Хаббл миссиясынан алынған жағдай үшін (2.14) теңдеуді қолданып тұрғызылған графигі; в – Хаббл параметрі Хаббл миссиясынан алынған жағдай үшін (2.13) теңдеуді қолданып тұрғызылған графигі

Сурет 5 – (2.13) және (2.14) теңдеулеріндегі  $V(z)$  және  $\phi(z)$  функцияларының реконструкциясының графигтері

Ескерту – 1-кестеде келтірілген  $H(z)$  деректерге сүйеніп жасалған

Жоғарғы панельдің графигтері (2.15) теңдеуімен берілген квадратты экспоненттің ядросы үшін ГП-нің реконструкциясына сәйкес келеді. Төменгі панельдегі графигтер (2.16) теңдеуімен берілген Матерн ( $\nu = 9/2$ ) ядросы үшін ГП-нің реконструкциясына сәйкес келеді. Қою сызық реконструкцияның орташа мәнін білдіреді, ал көлеңкеленген көк аймақтар сәйкесінше реконструкциялаудың сенім аймағы 68% және 95% құрайды.  $H_0 = 71.286 \pm 3.743 \text{ км с}^{-1} \text{ Мпк}$  және  $H_0 = 71.196 \pm 3.867 \text{ км с}^{-1} \text{ Мпк}$  мәндері үшін

карастырылған аймақ  $H_0$  ядро теңдеуімен берілген кезде ГП арқылы (2.15) және (2.16) теңдеулері үшін сәйкес келеді (6-сурет).



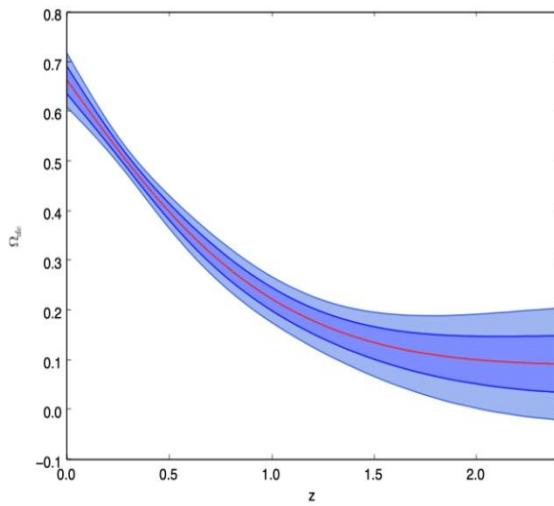
а – салыстырмалы тығыздық пен қызыл ығысу Хаббл параметрі  $H_0 = 73.52 \pm 1.62 \text{ кмс}^{-1} \text{ Мпк}$  болғандағы графигі; ә – салыстырмалы тығыздық пен қызыл ығысу Хаббл параметрі  $H_0 = 71.286 \pm 3.743 \text{ кмс}^{-1} \text{ Мпк}$  болғандағы графигі.

Сурет 6 – 1-кестеде келтірілген  $H(z)$  деректер бойынша  $\Omega_{de} = \frac{\rho_\phi}{3H^2}$  реконструкциялау

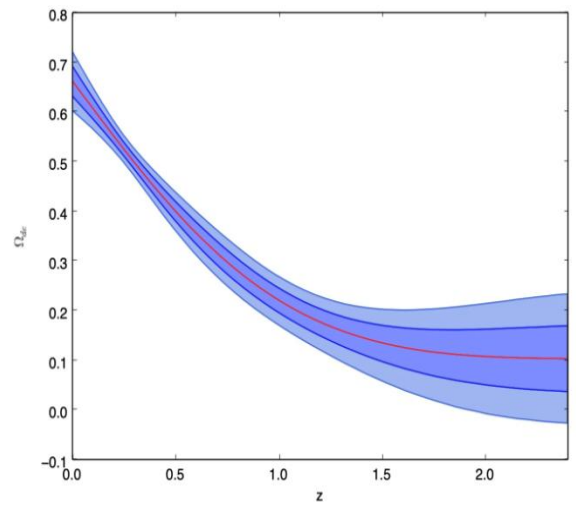
Сол жақтағы график (2.15) теңдеуімен берілген квадрат экспонентті ядросы үшін ГП-нің реконструкциясына сәйкес келеді. Оң жақ график (2.16) теңдеуімен берілген Матерн ( $\nu = 9/2$ ) ядросы үшін ГП-нің реконструкциясына сәйкес келеді. Қою сызық реконструкцияның орташа мәнін білдіреді, ал көлеңкеленген көк аймақтар  $H_0 = 71.286 \pm 3.743 \text{ кмс}^{-1} \text{ Мпк}$  (2.15) реконструкцияның сенім аймағы 68% және 95% құрайды. Ал  $H_0 = 71.196 \pm 3.867 \text{ кмс}^{-1} \text{ Мпк}$  ГП-і 1-кестеде келтірілген мәліметтерден алынған, ядро Матерн ( $\nu = 9/2$ ) теңдеу (2.16) болған кезде бағаланды.

Оң жақ график (2.16) теңдеуімен берілген Матерн ядросы үшін ГП-нің реконструкциясына сәйкес келеді. Қою сызық реконструкцияның орташа мәнін білдіреді, ал көлеңкеленген көк аймақтар сәйкесінше сенім аймағы 68% және 95% құрайды (7, 8-суреттер).





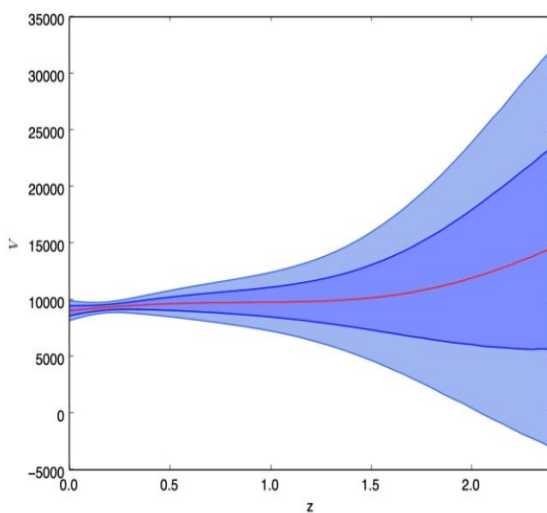
а



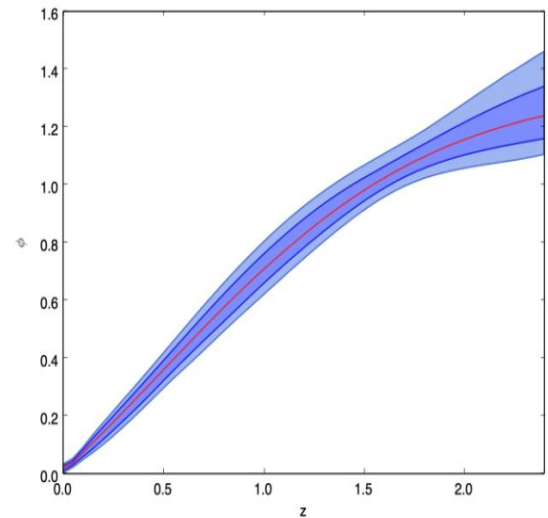
ә

а – салыстырмалы тығыздық (2.15) теңдеу үшін графигі ; ә – салыстырмалы тығыздық (2.16) теңдеу үшін графигі

Сурет 7 – Реконструкция 1-кестеде келтірілген  $H(z)$  деректерге сәйкес, сол жақтағы  $\Omega_{dE} = \frac{\rho_\phi}{3H^2}$  графикте (2.15) теңдеумен берілген квадрат экспоненттің ядросы үшін ГП-нің реконструкциясына сәйкес келеді



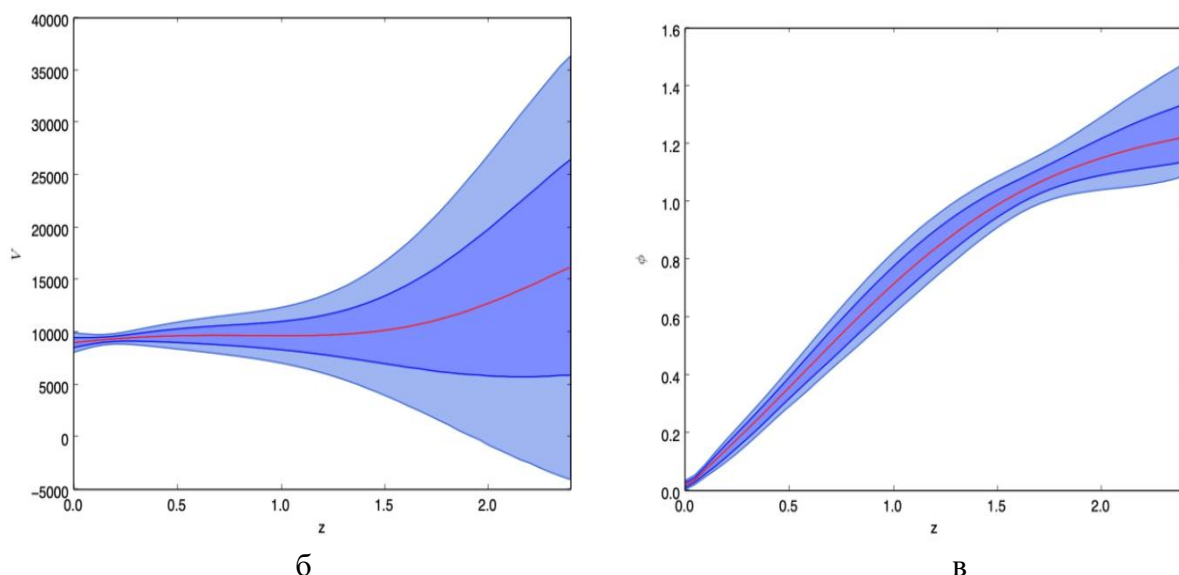
а



ә

а – Хаббл парметрі Планк миссиясынан алынған жағдай үшін (2.14) теңдеуді қолданып тұрғызылған графигі; ә – Хаббл парметрі Планк миссиясынан алынған жағдай үшін (2.13) теңдеуді қолданып тұрғызылған графигі

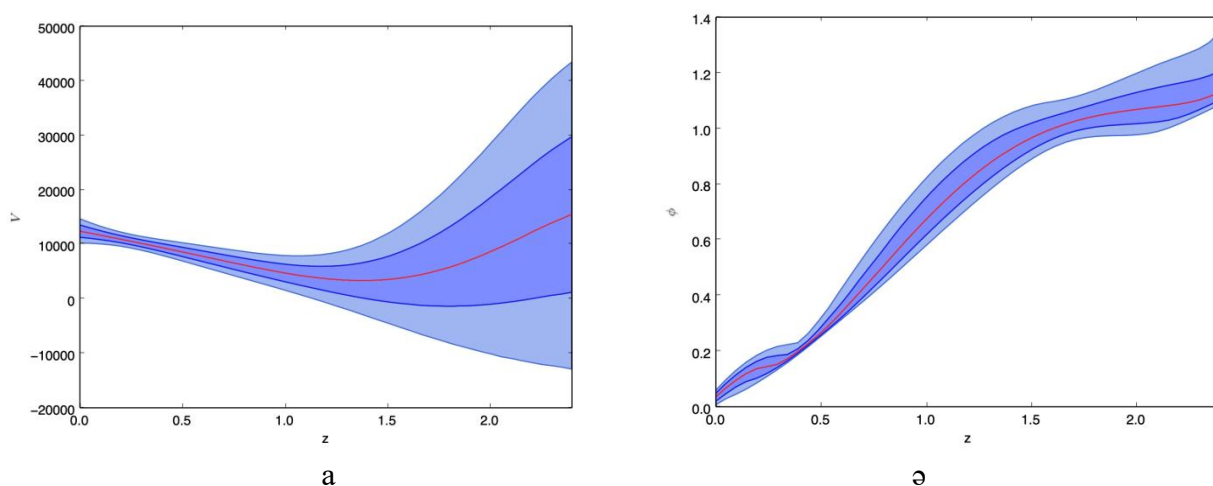
Сурет 8 – Реконструкция  $V(z)$  теңдеу (2.13) және  $\phi(z)$  теңдеуі (2.14), 1-кестеде келтірілген  $H(z)$  деректерге сәйкес  $H_0 = 67.40 \pm 0.5 \text{ км с}^{-1} \text{ Мпк}$ , парақ 1



б – Хаббл парметрі Планк миссиясынан алынған жағдай үшін (2.13) теңдеуді қолданып тұрғызылған графигі; в – Хаббл парметрі Планк миссиясынан алынған жағдай үшін (2.14) теңдеуді қолданып тұрғызылған графигі

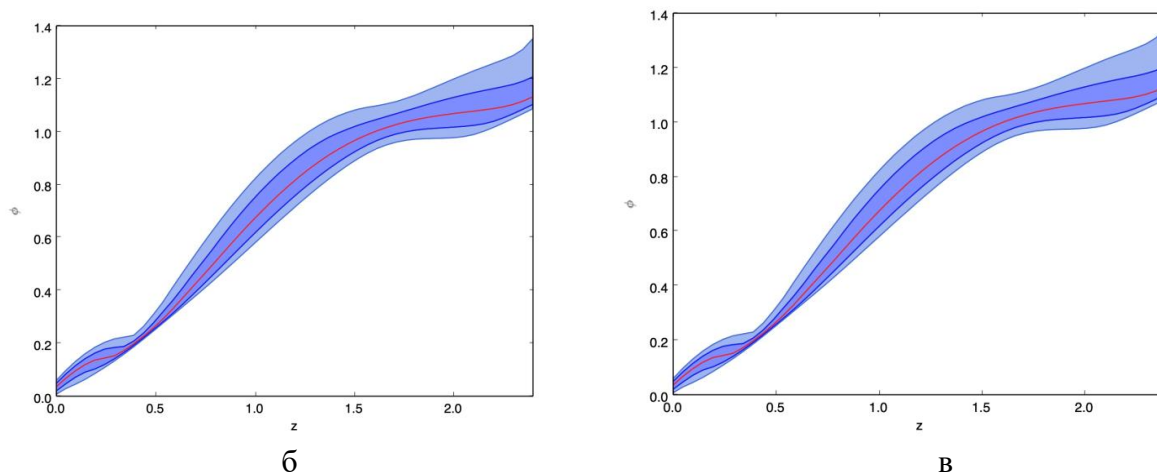
Сурет 8, парақ 2

Жоғарғы панельдің графиктері экспоненттің квадрат ядросы үшін ГП-нің реконструкциясына (2.15) теңдеуіне сәйкес келеді. Төменгі панельдегі графиктер (2.16) теңдеуімен берілген Ядро үшін ГП-нің реконструкциясына сәйкес келеді. Қою сызық реконструкцияның орташа мәнін білдіреді, ал көлеңкеленген көк аймақтар сәйкесінше сенім аймағы 68% және 95% реконструкциялауды білдіреді (9-сурет).



а – Хаббл парметрі Хаббл миссиясынан алынған жағдай үшін (2.14) теңдеуді қолданып тұрғызылған графигі; ә – Хаббл парметрі Хаббл миссиясынан алынған жағдай үшін (2.13) теңдеуді қолданып тұрғызылған графигі

Сурет 9 –  $V(z)$  реконструкциясы (2.13) теңдеуінің және  $\phi(z)$  шамасы (2.14) теңдеуі үшін 1-кестеде келтірілген  $H(z)$  деректерінің мәндерінің көмегімен тұрғызылған, парақ 1



б – Хаббл парметрі Хаббл миссиясынан алынған жағдай үшін (2.14) теңдеуді қолданып тұрғызылған графигі; в – Хаббл парметрі Хаббл миссиясынан алынған жағдай үшін (2.13) теңдеуді қолданып тұрғызылған графигі

Сурет 9, парақ 2

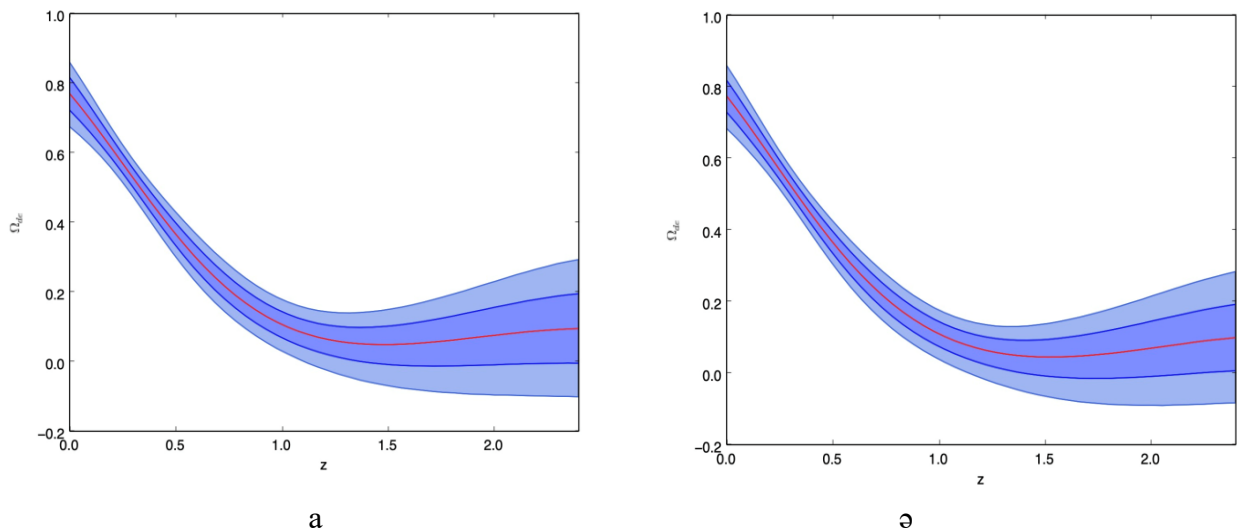
Жоғарғы панельдің графиктері экспоненттің квадрат ядросы үшін ГП-нің реконструкциясына сәйкес келеді. Төменгі панельдегі графиктер (2.16) теңдеуімен берілген ядро үшін ГП-нің реконструкциясына сәйкес келеді. Қою сызық реконструкцияның орташа мәнін білдіреді, ал көлеңкеленген көк аймақтар реконструкцияның сенім аймағы 68% және 95% құрайды.

Сонымен, бұл тарауда ГП-і және КЭ квинтэссенциясын нақтырақ бейнелейтін потенциалдың функционалды түрін реконструкциялау үшін Әлемнің ұлғаю жылдамдығы туралы қол жетімді деректер қолданылды. КЭ физикасы туралы әртүрлі және маңызды ашық сұрақтар бар және оларға жауап беру міндеті әдетте модельге тәуелді әдістерді қолдану арқылы шешіледі. КЭ квинтэссенциялды парадигмасы ең көп талқыланатын модельдердің бірі болып табылады. Онда потенциалды өрістің формасы қолмен таңдалады, негізінен бақылау деректерін көбейтуге бағытталған феноменологиялық әдістің бір түрі. Мұнда КЭ-ның басқа модельдеріне де қатысты екенін және КЭ-ның нақты модельдерін жасау үшін негізінен феноменологияға негізделген мотивтер ұсынылғанын байқаймыз (10-сурет).

Сол жақтағы график (2.15) теңдеуімен берілген экспоненттің квадрат ядросы үшін ГП-нің реконструкциясына сәйкес келеді. Оң жақ график (2.16) теңдеуімен берілген Матерн ( $\nu = 9/2$ ) ядросы үшін ГП-нің реконструкциялауға сәйкес келеді. Қою сызық реконструкцияланған орташа мәнін білдіреді, ал көлеңкеленген көк аймақтар сәйкесінше реконструкциялаудың сенім аралығы 68% және 95% аралығын құрайды.

Осы бұрын жүргізілген зерттеулердің барлығына балама ретінде біз мұнда потенциалды модельден тәуелсіз реконструкциялау туралы толық ақпарат бердік. Сонымен қатар, реконструкциялау нәтижелерін жаңа потенциалдарды құру және еркін параметрлерді шектеу үшін пайдалануға болады. Фондық

динамика туралы ең негізгі болжамдарға сүйеніп, скаляр өрістің өзін  $H(z)$  және  $H'(z)$  арқылы көрсетуге болатындығын келтірдік, оларды ГП-і үшін Әлемнің ұлғаю жылдамдығы туралы мәліметтерден модельге тәуелсіз түрде реконструкциялауға болатынын анықтадық. ГП-і әртүрлі салаларда, соның ішінде космологияда қарқынды қолданылатын өте пайдалы Машиналық оқыту әдісі құралдарының бірі болып табылады. Бұл әдістің негізгі проблемасы-реконструкциялауды аяқтау үшін таңдау керек ядро функциясының пішінін көрсету. Осыған байланысты әдебиеттерде әртүрлі қызықты пікірталастар бар, оларды деректер мен тапсырмалар үшін бірнеше ядроларды қолданып, нәтижелерді салыстырған дұрыс деп қорытындылауға болады.



а – салыстырмалы тығыздық (2.15) теңдеу үшін графигі ; ә – салыстырмалы тығыздық (2.16) теңдеу үшін графигі

Сурет 10 –  $H_0 = 73.52 \pm 1.62 \text{ км с}^{-1} \text{ Мпк}$  кезінде 1-кестеде келтірілген  $H(z)$

деректер бойынша  $\Omega_{de} = \frac{\rho_\phi}{3H^2}$  реконструкциясы

Бұл тарауда КЭ потенциалының квинтессенциясы қарастырылған және сәйкес өріс үш түрлі жағдай үшін реконструкцияланды:

1.  $H_0$  керілу параметрі ГП-нің  $H(z)$  және  $H'(z)$  функцияларын қолданыстағы 40 мәндік нүктеге негізделген реконструкция арқылы бағаланған кезде Әлемнің ұлғаю жылдамдығының деректер жиынтығы;

2.  $H_0$  керілу параметрі Планк миссиясы бойынша бағаланған мәнге ие болғанда,  $H(z)$  және  $H'(z)$  реконструкциясы орындалады;

3.  $H_0$  керілу параметрі Хаббл миссиясының нәтижелері бойынша алынған мәнге тең болғана,  $H(z)$  және  $H'(z)$  реконструкциясына сәйкес келеді.

Осылайша,  $H_0$  керілу мәселесін тиімді шешуге қолайлы мысал, ол  $V(\phi) \approx e^{-\lambda\phi}$  потенциалы бар модель. Сонымен қатар жаңа  $V(\phi) \approx \phi^\lambda [1 - \sin^n(\beta\phi)]$  потенциалын космологияда қолдануға кеңес беруге болады. Бұл шын мәнінде осы диссертацияда жасалған жаңа жаңалық.

### 3 СКАЛЯР ӨРІСІ БАР ТЕЛЕПАРАЛЛЕЛЬ ГРАВИТАЦИЯДАҒЫ ӨЛЕМНІҢ ЭВОЛЮЦИЯСЫ

Бұл тарау негізінен физикада кеңінен қолданылатын математиканың маңызды симметрияларының бірі Нетер теориясына арналған. Нетер теоремасы 1918 жылы тұжырымдалғаннан бері, бұл теория теориялық және қолданбалы физиканың негізгі құралдарының бірі болды, ғылымның көптеген салаларда бірнеше жақсы нәтижелер берді. Нетер теоремасы кванттық өріс теориясының негізін қалайтын міндетті дәлелдердің бірі [118, 119]. Оның ерекшелігінің себебі симметриямен сақталу заңдарының арасындағы байланыстың негіздерінде жатыр. Әдебиеттерде симметрияның түрлендірулері мен сақталу заңдары (мысалы, энергия немесе бұрыштық импульс моменті) арасындағы қатынастар зерттелген [120]. Нетер теоремасын қолданып қозғалыс интегралдарын табуға қабілетті болатын сәйкес генераторы анықтауға болады. Бұл принциптің жалпы болғаны соншалық, көптеген физикалық маңызды шамалар әдетте олардың симметрия қасиеттері арқылы анықталады. Мысалы, энергияны жүйе қозғалысының интегралы ретінде анықтауға болады, ол уақыт ауысуына инвариантты. Бұрыштық импульс моменті айналуға қатысты инвариантты шама болып табылады. XX ғасырдың басында көптеген сақталу заңдары тиісті симметрия әсеріне байланысты болды. Соның арқасында симметриямен сақталу заңдарын байланыстыратын жалпы бір теореманы 1918 жылы неміс ғалымы Эмми Нетер ұсынды. Алғаш рет жалпы түрде ол берілген түрлендірулердегі Лагранж инварианттылығын қозғалыс интегралдарымен байланыстырды, бұл кез-келген симметрия  $\partial_\mu j^\mu = 0$  үздіксіздік теңдеуіне әкелетінін көрсетті. Көп ұзамай Э. Нетер екінші теоремасын ұсынды, оған сәйкес әсер функционалдығының симметриясын дифференциалдық теңдеулер жүйесімен байланыстыруға болады [121, 122]. Бұл тарауда біз скаляр өрісі бар телепараллель гравитациядағы Өлемнің эволюциясы сипаттау үшін Нетер теорема әдісін қолданамыз.

#### 3.1 Нетер теоремасының негіздері

Нетердің алғашқы теоремасы бойынша: локальды әсерден туындаған әрбір дифференциалданатын симметрия оған сәйкес келетін тұрақты ток, немесе Нетер тогы деп аталатын шамаға тең. Нетер теоремасы симметриялар мен қозғалыс интегралдары арасындағы алғашқы әмбебап байланысты қалыптастырды

$$\begin{cases} \tilde{x}^a = x^a - \delta x^a \\ \tilde{\phi}^i = \phi^i - \delta \phi^i, \end{cases} \quad (3.1)$$

Лагранждың тығыздығы өзгергеннен кейін  $L(x^a, \phi^i, \partial_a \phi^i) \rightarrow L(\tilde{x}^a, \tilde{\phi}^i, \partial_a \tilde{\phi}^i)$  трансформация генераторын табу үшін (3.1) теңдеуден, біз өрістің  $\phi^i$  негізгі туындылары үшін трансформация заңын қарастырамыз

$$\frac{d\tilde{\phi}^i}{d\tilde{x}^a} = \frac{d\phi^i - \delta\phi^i}{dx^a - \delta x^a} = \left( \frac{d\phi^i}{dx^a} - \frac{d\delta\phi^i}{dx^a} \right) \left( 1 - \frac{d\delta\phi^b}{dx^b} \right)^{-1} \approx \left( \frac{d\phi^i}{dx^a} - \frac{d\delta\phi^i}{dx^a} \right) \left( 1 + \frac{d\delta\phi^b}{dx^b} \right), \quad (3.2)$$

мұнда соңғы эквиваленттілік бірінші ретке дейін сақталады. Оны келесі шарт бойынша аламыз

$$\frac{d\tilde{\phi}^i}{d\tilde{x}^a} = \frac{d\phi^i}{dx^a} - \left( \frac{d\delta\phi^i}{dx^a} - \frac{d\phi^i}{dx^a} \frac{d\delta\phi^b}{dx^b} \right) = \partial_a \phi^i - (\partial_a \delta\phi^i - \partial_a \phi^i \partial_b \delta x^b). \quad (3.3)$$

Алдыңғы нәтижеден координаттар мен өрістерді және алғашқы туындыны қамтитын генератор (3.1) теңдеудегі түрлендіруі келесідей болады

$$X^{[1]} = \delta x^a \partial_a + \delta\phi^i \frac{\partial}{\partial\phi^i} + (\partial_a \delta\phi^i - \partial_a \phi^i \partial_b \delta\phi^b) \frac{\partial}{\partial(\partial_a \phi^i)}. \quad (3.4)$$

Мұндағы әріптің үстіндегі [1] белгісі Нетер векторының «бірінші ұлғаю» тек бірінші ретті өрістердің туындыларын білдіреді. Канондық лагранжиандар қарастырылған кезде, симметрияларды табу үшін «ұлғаю» векторды одан әрі қадағалау қажет емес. Жүйе үшін процедураларды жоғары туындыларда түрлендіру ережесін қосу арқылы жалпылауға болады. Лагранж функциясы үшін

$$L \equiv L(x^a, \phi^i, \partial_{a_1} \phi^i, \partial_{a_1 a_2} \phi^i, \dots, \partial_{a_1 a_2 \dots a_n} \phi^i), \quad (3.5)$$

(3.4) теңдеудегі оператор қосымша ұлғайғанда

$$X^{[1]} = \delta x^a \partial_a + \delta\phi^i \frac{\partial}{\partial\phi^i} + \delta\phi_{a_1}^{i[1]} \frac{\partial}{\partial(\partial_{a_1} \phi^i)} + \dots + \delta\phi_{a_1 a_2 \dots a_n}^{i[n]} \frac{\partial}{\partial(\partial_{a_1 a_2 \dots a_n} \phi^i)}. \quad (3.6)$$

Сонымен бірге

$$\phi_{a_1 a_2 \dots a_n}^{[n]} \equiv \partial_{[a_1 a_2 \dots a_{n-1}] } \delta\phi^{i[n-1]} - \partial_b \delta x^b \partial_{a_1 a_2 \dots a_n} \phi^i, \quad \partial_a \delta\phi^{i[0]} = \partial \delta x^i. \quad (3.7)$$

Нетер теоремасының канондық лагранждарға қолданылуын ескере отырып, одан әрі жоғары дифференциалдарды қарастыруға ешқандай себеп жоқ; осылайша, болашақта біз негізінен (3.4) теңдеудегі векторға назар аударамыз. Егер (3.1) және (3.3) түрлендірулер қозғалыс теңдеулерін өзгеріссіз қалдырса, онда  $g^a = g^a(x^a, \phi^i)$  функциясы шартты қанағаттандырады

$$\tilde{L} = \frac{d\tilde{x}^a}{dx^a} L + \partial_a g^a, \quad (3.8)$$

бұл дегеніміз, бастапқы лагранжиан және түрлендірілген лагранжиан тек төрт-модификацияда ерекшеленеді. Түрлендірулердің толық жиынтығын қолдана отырып, түрлендірілген тығыздық Лагранж функциясын  $\tilde{L}$ , бірінші ретті дәлдікпен, келесі түрде жазуға болады

$$\tilde{L}(\tilde{x}^a, \tilde{\phi}^i, \partial_a \tilde{\phi}^i) = L(x^a, \phi^i, \partial_a \phi^i) + \partial_a L \delta x^a + \frac{\partial L}{\partial \phi^i} \delta \phi^i + \frac{\partial L}{\partial (\partial_a \phi^i)} \delta (\partial_a \phi^i). \quad (3.9)$$

(3.3) теңдеуінің көмегімен, атап айтқанда

$$\delta (\partial_a \phi) = -(\partial_a \delta \phi^i - \partial_a \phi^i \partial_b \delta x^b)$$

келесі теңдеу пайда болады

$$X^{(1)} = \delta x^a \partial_a + \delta \phi^i \frac{\partial}{\partial \phi^i} + (\partial_a \delta \phi^i - \partial_a \phi^i \partial_b \delta x^b) \frac{\partial}{\partial (\partial_a \phi^i)}. \quad (3.10)$$

Сонымен қатар,  $\frac{d\tilde{x}^a}{dx^a} = 1 - \partial_a \delta x^a$  тепе-теңдікті пайдаланып (3.9) теңдеуінің нәтижесінде Эйлер-Лагранж теңдеулерінің инварианттылығының шарты шығады

$$\left[ \delta x^a \partial_a + \delta \phi^i \frac{\partial}{\partial \phi^i} + (\partial_a \delta \phi^i - \partial_a \phi^i \partial_b \delta x^b) \frac{\partial}{\partial (\partial_a \phi^i)} \right] L + \partial_a \delta x^a L = \partial_a g^a, \quad (3.11)$$

(3.4) теңдеуді пайдалана отырып (3.11) теңдеуді келесідей қайта жазуға болады

$$X^{(1)} L + \partial_a \delta x^a L = \partial_a g^a \quad (3.12)$$

Қорытындылай келе, егер (3.1) түрлендірулер жиыны қозғалыс теңдеулері үшін симметриялы болса, онда (3.12) теңдеуі шартты түрде орындалуы керек екенін көрсетті. Симметрияны түрлендіруге байланысты Нетер тоғын табу үшін Лагранж тығыздығының дербес туындысы  $\partial L$  оның толық туындысы арқылы  $\frac{dL}{dx^a}$  түрінде жазылуы мүмкін екенін ескеріп, төмендегі өрнекті аламыз

$$\delta x^a \partial_a L = \frac{dL}{dx^a} \delta x^a - \frac{\partial L}{\partial \phi^i} \partial_a \phi^i \delta x - \frac{\partial L}{\partial (\partial_b \phi^i)} \partial_b \partial_b \phi^i \delta x^a = 0. \quad (3.13)$$

Бұл жағдайда екі теңдік көмегімен

$$\begin{cases} \partial_a \delta \phi^i \frac{\partial L}{\partial (\partial_a \phi^i)} = \partial_a \left( \frac{\partial L}{\partial (\partial_a \phi^i)} \delta \phi^i \right) - \delta \phi^i \partial_a \left( \frac{\partial L}{\partial (\partial_a \phi^i)} \right) \\ \partial_a \delta x^a \frac{\partial L}{\partial (\partial_b \phi^i)} \partial_b \phi^i = \partial_a \left( \frac{\partial L}{\partial (\partial_b \phi^i)} \partial_b \phi^i \delta x^a \right) - \partial_a \left( \frac{\partial L}{\partial (\partial_b \phi^i)} \partial_b \phi^i \right) \delta x^a, \end{cases} \quad (3.14)$$

анықталған (3.13) және (3.14) теңдеулерін (3.12) теңдеуіне қолданып төмендегі теңдеуді аламыз

$$\partial_a \left[ \frac{\partial L}{\partial (\partial_a \phi^i)} \delta \phi^i - \frac{\partial L}{\partial (\partial_a \phi^i)} \partial_b \phi^i \delta x^b + L \delta x^a - g^a \right] = 0. \quad (3.15)$$

Мұндағы төртбұрышты жақша ішіндегі өрнек тұрақты шама болып табылады. Оны келесі түрде белгілейміз

$$j^a = \frac{\partial L}{\partial (\partial_a \phi^i)} \delta \phi^i - \frac{\partial L}{\partial (\partial_a \phi^i)} \partial_b \phi^i \delta x^b + L \delta x^a - g^a \quad (3.16)$$

Бұл анықталған шама физикада Нетер тогы деп аталады. Осылайша, Нетер теоремасын, Нетер операторының бірінші баламасы ретінде келесідей қайта құруға болады:

Егер

$$X^{[1]} L(a, \phi^i, \partial_a \phi^i) + \delta x^a L(a, \phi^i, \partial_a \phi^i) - \partial_a g^a(x^a, \phi^i) = 0$$

шарт болса, онда

$$j^a = \frac{\partial L}{\partial (\partial_a \phi^i)} \delta \phi^i - \frac{\partial L}{\partial (\partial_a \phi^i)} \partial_b \phi^i \delta x^b + L \delta x^a - g^a$$

қозғалыс теңдеулерінің бірінші интегралы болып табылады.

Нетер  $\partial_a j^a$  тогын төрт өлшемді көлемінен  $\Omega$  интегралдап, дивергенцияны қолдана отырып,  $Q$  Нетер заряды деп аталатын шаманы табуға болады:

$$\int_{\Omega} \partial_a j^a d\Omega = \int_{\Sigma} j^a d\Sigma_a \equiv Q \quad (3.17)$$



мұнда  $\Sigma_a$  - гипербет. Нетер заряды  $j^a$  ағын ретінде анықталған симметрия түрлендірулеріне қатысты скалярлық шама.

Симметрия түрлендіруі кеңістік-уақыт координаталарының өзгеруін қамтымайтын ішкі симметрия деп есептейміз (3.1) теңдеуден осылайша, түрлендірулер аламыз:

$$\begin{cases} \delta x^a = 0 \\ \delta \phi^a = \tilde{\phi}^i - \phi^i \\ \tilde{L}(\tilde{x}^a, \tilde{\phi}^i, \partial_a \tilde{\phi}^i) = L(x^a, \phi^i, \partial_a \phi^i) \end{cases} \quad (3.18)$$

Лагранж функциясының вариациясы

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial \phi^i} \delta \phi^i + \frac{\partial L}{\partial (\partial_a \phi^i)} \delta \partial_a \phi^i = \partial_a \left( \frac{\partial L}{\partial (\partial_a \phi^i)} \delta \phi^i \right) = 0. \quad (3.19)$$

Онда, Нетер тогын және сәйкес Нетер векторын келесідей жеңілдетіп жазуға болады

$$j^a = \frac{\partial L}{\partial (\partial_a \phi^i)} \delta \phi^i, \quad X = \frac{\partial}{\partial \phi^i} \delta \phi^i + \frac{\partial}{\partial (\partial_a \phi^i)} \delta \partial_a \phi^i = 0 \quad (3.20)$$

Бұл жалпы теореманы жеңілдету ғана болса да, циклдік айнымалыны Лагранж жүйесіне енгізу үшін қолайлы қатынасты береді. Мақсат  $\phi^1$  жаңа айнымалыны табу және оның түйіндес импульсі қозғалыс тұрақтысына тең екені көрсету

$$\frac{\partial L}{\partial (\partial_a \phi^1)} = \pi_{\psi^1}^a = const. \quad (3.21)$$

Жоғарыдағы (3.20) бірінші теңдеуі мұндай тұрақтыны тек шексіз аз генератордың реттілік бірлігі болған жағдайда ғана Нетер тогы арқылы шешуге болатынын көрсетеді. Сондықтан,  $\psi^1$  циклді болатын  $\phi^i \rightarrow \psi^1(\phi^j)$  айнымалылардың жалпы өзгерісін қарастырамыз. Нетер операторын  $X$  дербес туынды арқылы  $i_x$  жаңа айнымалылар жиыны түрінде жазуға болады

$$\delta \phi^i \frac{\partial}{\partial \phi^i} = \delta \phi^i \frac{\partial \psi^j}{\partial \phi^i} \frac{\partial}{\partial \psi^j} = i_x d\psi^j \frac{\partial}{\partial \psi^j} \quad (3.22)$$

Нетер операторын  $X'$  жазуды жеңілдету үшін (3.22) теңдеуді қолданамыз

$$X' = \delta\phi^i \frac{\partial}{\partial\phi^i} + \partial_a \delta\phi^i \frac{\partial}{\partial(\partial_a\phi^i)} = (i_x d\psi^k) \frac{\partial}{\partial\psi^k} + \partial_a (i_x d\psi^k) \frac{\partial}{\partial(\partial_a\psi^k)} \quad (3.23)$$

Нәтижесінде, сақталатын  $j^a$  мүшені қайта келесідей жазуға болады

$$j^a = \delta\psi^i \frac{\partial L}{\partial(\partial_a\psi^i)} = i_x d\psi^i \frac{\partial L}{\partial(\partial_a\psi^i)} \quad (3.24)$$

сақталған мүше импульс түйіндесіне  $\psi^1$  тең болса, келесі шарттар орындалуы керек:

$$i_x d\psi^1 = \delta\phi^j \frac{\partial\psi^1}{\partial\phi^j} = 1, \quad i_x d\psi^i = \delta\phi^j \frac{\partial\psi^1}{\partial\phi^j} = 0, \quad i \neq 1, \quad (3.25)$$

сонымен, (3.24) теңдеуінен

$$j^a = \delta\phi^i \frac{\partial L}{\partial(\partial_a\phi^i)} = \frac{\partial L}{\partial(\partial_a\psi^1)} \rightarrow \pi_{\psi^1}^a = const, \quad (3.26)$$

Теңдеуін аламыз,  $X'L' = XL$  шартты айнымалыларға тәуелсіз орындалатынын ескеріп, айнымалыларды ауыстырған кезде Нетердің симметриясы сақталады.

### 3.1.1 Еркін бөлшектер үшін Нетер теоремасы

Еркін бөлшектерге байланысты лагранж функциясын қарастыратын болсақ, мұнда  $q^i$  жалпыланған координаттар және  $\dot{q}^i$  жалпыланған жылдамдықтар деп аламыз, онда

$$L \cong L(q^i(t), \dot{q}^i(t)) = \dot{q}^i. \quad (3.27)$$

Біз жүйеде Нетер векторымен бірге бір белгісіз симметрия бар деген болжамнан бастаймыз

$$X = \delta q^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \delta \dot{q}^i \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}. \quad (3.28)$$

Егер, (3.28) шартын (3.27) теңдеудегі Лагранж функциясына қолдану арқылы

$$2\dot{q}\delta\dot{q} = 0. \quad (3.29)$$

мұнда

$$\delta\dot{q} = \frac{d}{dt} \delta q = \frac{\partial \delta q}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial t}, \quad (3.30)$$

(3.29) теңдеуді (3.30) тепе-теңдікті қолданып қайта жазатын болсақ

$$\frac{\partial \delta q}{\partial q} = 0 \rightarrow \delta q = \text{const} \equiv q_0. \quad (3.31)$$

Сондықтан, симметрияның генераторы және сақталатын шамасы болатынын анықтаймыз

$$\aleph = q_0 \frac{\partial}{\partial q}, \quad j = q_0 \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = q_0 \pi_q. \quad (3.32)$$

Алынған нәтиже Лагранждың локальды қозғалысқа қатысты инвариантты екенін көрсетеді, осылайша сақталатын шама импульс түйіндесі болып шығады.

Сонымен, Нетер теоремасы дифференциалдық теңдеулер жүйесінің шешімдерінің симметриясына негізделген маңызды шешімдерді табуға арналған. Ол сондай-ақ, қарапайым дифференциалдық теңдеулерді интегралдау әдістерінің бірі болып табылады, өйткені ол кейбір жағдайларда теңдеулер жүйесінің алғашқы функцияларын табуға және осылайша белгісіз функциялардың санын азайтуға мүмкіндік береді. Мысалы:

1. Жүйе импульсінің сақталуы - кеңістіктің өзгеруіне қатысты инварианттылығынан туындайды. Нақтырақ айтсақ: егер  $x$  осі бойымен ығысу теңдеулер жүйесін өзгертпесе, онда сол ось бойымен импульс сақталады;

2. Импульс моментінің сақталуы - кеңістіктің бұрылуына қатысты инварианттылығынан туындайды;

3. Энергияның сақталу заңы - уақыттың біртектілігінің салдары болып табылады, бұл уақыттың басталуын ерікті түрде ауыстыруға мүмкіндік береді.

### **3.2 Телепараллель гравитациясы мен скаляр-тензорлық теория көмегімен жазық және изотропты Әлемнің эволюциясын сипаттау**

Бұл бөлімде біз телепараллель гравитация мен скаляр-тензорлық теориясының шеңберінде жазық, біртекті және изотропты Әлемнің моделін қарастырамыз. Телепараллель гравитация классикалық гравитациялық теорияның альтернативті теорияларының бірі болып табылады. Ал мұндағы скалярлық-тензорлық теория Әлемдегі материяны сипаттауға қолданылады, оның негізінде  $\varphi$  скалярлық өріс жатыр. Космологияда скалярлық өрістерді олардың қарапайымдылығынан кеңінен пайдаланады. Мұнда скалярлық өріс гравитациялық өріспен минимальды емес байланыс жасайды. Қарастырып

отырған модель үшін қозғалыс теңдеулерін анықтау үшін біз Эйлер-Лагранж теңдеулері мен нольдік энергия шартын пайдаланамыз. Бұл теңдеулер екінші ретті сызықты емес дифференциалдық теңдеулер болып табылады, ал мұндай теңдеулерді математикалық тұрғыдан шешу күрделі. Сондықтан Нетер теоремасын пайдалана отырып, нақтырақ айтқанда, біз осы әдістің көмегімен қосымша теңдеулерді алып, олармен іздестіріп отырған  $F(\varphi)$  байланыс функциясы мен  $V(\varphi)$  потенциалдық энергия үшін нақты шешімдерін табамыз. Алынған шешімдерді қозғалыс теңдеулеріне қолданып,  $a(t)$  масштабты фактор және  $\varphi(t)$  скалярлық өрісті сипаттайтын белгісіз шамалардың математикалық есептеулерден кейін нақты шешімдерін анықтаймыз [123-129]. Әлемнің эволюциясын сипаттау үшін біз қосымша космологиялық параметрлерді  $\omega$  күй теңдеу параметрі мен  $q$  баяулау параметрлерін анықтаймыз [124]. Сонымен алынған шешімдер КЭ моделіне сәкес келеді және Әлемнің қазіргі ұлғаю кезеңін сипаттайды.

### 3.2.1 Телепараллель гравитация үшін әсер және қозғалыс теңдеулері

Алдымен біз қарастырып отырған космологиялық модель үшін әсерді жазамыз:

$$S = \int d^4 x e [F(\varphi)T + \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - V(\varphi)], \quad (3.33)$$

мұнда  $e$  шамасы  $e^i_\mu$  тетрадалардың анықтаушысы,  $T$  - ширату тензорының скаляры,  $F(\varphi)$  байланыс функциясы және  $V(\varphi)$  потенциалдық энергия болып табылады.

Сонымен қатар біз мұнда ФРУ метрикасын қарастырамыз:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (3.34)$$

мұнда  $a(t)$  шамасы масштабты фактор болып табылады. Бұл метрика қазіргі астрономиялық бақылау мәліметтерімен жақсы үйлесімде. Бұл метрика үшін біз келесі шамаларды аламыз:

$$e = \sqrt{-g} = a^3, \quad T = -6 \frac{\dot{a}^2}{a^2}, \quad L_\varphi = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - V(\varphi).$$

Бұл өрнектердегі әріптің үстіндегі нүкте уақыт бойынша туындыны білдіреді.

Әсер (3.33) пен (3.34) метриканы пайдаланып біз қарастырып отырған модель үшін Лагранж функциясын төмендегідей жаза аламыз

$$L = -6F(\varphi)a\dot{a}^2 + \frac{1}{2}a^3\dot{\varphi}^2 - a^3V. \quad (3.35)$$

Енді қарастырып отырған модель үшін қозғалыс теңдеулерін анықтаймыз. Ол үшін Эйлер-Лагранж теңдеулерімен нөлдік энергия шартын падаланамыз:

$$\frac{\partial L}{\partial a} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{a}} = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 0,$$

$$E = H_0 = \frac{\partial L}{\partial \dot{a}} \dot{a} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \dot{\varphi} - L = 0.$$

Осы теңдеулерге Лагранж функциясын (3.35) апарып қоятын болсақ, онда

$$6 \frac{\dot{a}^2}{a^2} F - \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - V = 0, \quad (3.36)$$

$$2 \frac{\dot{a}^2}{a^2} F + 4 \frac{\ddot{a}}{a} F + 4 \frac{\dot{a}}{a} F' \dot{\varphi} + \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - V = 0, \quad (3.37)$$

$$\ddot{\varphi} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \dot{\varphi} + 6 \frac{\dot{a}^2}{a^2} F' + V' = 0. \quad (3.38)$$

Қарастырып отырған модель үшін қозғалыс теңдеулерін аламыз. Бұл теңдеулер жүйесі сызықты емес екінші ретті дифференциалдық теңдеулер болып табылады, оларды аналитикалық жолмен шешу үшін Нетер теоремасын қолдау әдісін пайдаланамыз.

### 3.2.2 Телепараллель гравитацияда Нетер теоремасын қолдану

Қарастырған (3.36)-(3.38) теңдеулер жүйесін шешу үшін Нетер теоремасын қолданатын болсақ, Нетер симметриясы Ли алгебрасы бойынша  $L$  Лагранж функциясының  $\vec{X}$  генераторы бойынша көбейтіндісі нөлге айналу қажет [123, p. 450]:

$$\vec{X}L = 0, \quad (3.39)$$

мұнда  $\vec{X}$  генераторын (1) метрика үшін былай жазуға болады

$$\vec{X} = \alpha \frac{\partial}{\partial a} + \beta \frac{\partial}{\partial \varphi} + \dot{\alpha} \frac{\partial}{\partial \dot{a}} + \dot{\beta} \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}}.$$

Осы өрнектегі  $\alpha$  және  $\beta$  генераторлары қандайда бір  $a$  және  $\varphi$  шамаларына тәуелді шамалар, ал олардың уақыт бойынша туындылары келесідей анықталады

$$\dot{\alpha} = \frac{\partial \alpha}{\partial a} \dot{a} + \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} \dot{\varphi},$$

$$\dot{\beta} = \frac{\partial \beta}{\partial a} \dot{a} + \frac{\partial \beta}{\partial \varphi} \dot{\varphi}.$$

Онда (3.39) теңдеуде берілген симметрияның болу шартына байланысты келесі дифференциалдық теңдеулердің жиынтығын табамыз:

$$\alpha + 2a \frac{\partial \alpha}{\partial a} + \frac{F'}{F} a \beta = 0, \quad (3.40)$$

$$3\alpha + 2a \frac{\partial \beta}{\partial \varphi} = 0, \quad (3.41)$$

$$12F \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} - a^2 \frac{\partial \beta}{\partial a} = 0, \quad (3.42)$$

$$3V\alpha + aV'\beta = 0. \quad (3.43)$$

Төменде осы теңдеулер жүйесін қанағаттандыратын  $\alpha$  және  $\beta$  генераторлары,  $F(\varphi)$  байланыс функциясы мен  $V(\varphi)$  потенциалдық энергия үшін дербес шешімдерін жазамыз:

$$\alpha(a, \varphi) = \alpha_0 a^n \varphi, \quad (3.44)$$

$$\beta(a, \varphi) = -\frac{3}{2} \alpha_0 a^{n-1} \varphi^2, \quad (3.45)$$

$$F(\varphi) = F_0 \varphi^{\frac{2}{3}(2n-1)}, \quad (3.46)$$

$$V(\varphi) = V_0 \varphi^2. \quad (3.47)$$

мұнда  $\alpha_0, F_0, V_0$  және  $n$  шамалары қандай да бір тұрақты шамалар болып табылады. Келесі бөлімде осы алынған нақты шешімдерді қозғалыс теңдеулеріне апарып қоямыз.

### 3.2.3 Телепараллель гравитация үшін космологиялық шешімдер

Бұл бөлімде жоғарыдағы табылған  $F(\varphi)$  және  $V(\varphi)$  шешімдерін (3.36)-(3.38) теңдеулер жүйесіне апарып қоямыз, онда

$$\dot{a}^2 - \frac{m}{6} a^2 = 0, \quad (3.48)$$

$$\dot{\varphi}^2 - 2V_0\varphi^2 - 2mF_0\varphi^{2(2n-1)} = 0. \quad (3.49)$$

Осы теңдеулерді интегралдасақ, онда

$$a(t) = e^{\sqrt{\frac{m}{6}}(t-C_1)}, \quad (3.50)$$

$$\varphi(t) = -C_1 e^{2t}, \quad (3.51)$$

масштабты фактор мен скалярлы өрістің нақты шешімдерін табамыз. Масштабы фактордың мәнін пайдаланып Хаббл параметрін келесі түрде анықтаймыз

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{6} \sqrt{6m}. \quad (3.52)$$

мұнда қарастырылып отырған уақыт моментінде қысым мен энергия тығыздығы келесі мәнге ие болады

$$\rho = \frac{1}{2} m, \quad (3.53)$$

$$p = -\frac{1}{2} m. \quad (3.54)$$

Алынған мәндерді (3.53)-(3.54) пайдалана отырып күй теңдеу параметрін табамыз

$$\omega = \frac{p}{\rho} = -1. \quad (3.55)$$

Алынған бұл шешім КЭ моделіне сәйкес келеді және қазіргі Әлемнің эволюциясын сипаттауға мүмкіндік береді.

### 3.3 Нетер теорема әдісін скаляр өрісті $f(T, B)$ телепараллель гравитация теориясында қолдану

Жақында телепараллель гравитациялық теорияның жаңа модификациясы ұсынылды [124]. Бұл теорияда осыған дейінгі белгілі  $f(T)$  гравитациясы кеңейтілген  $f(T, B)$  ға дейін модификацияланды, мұндағы  $B$  шамасы  $B - R = -T + B$  арқылы Риччи скалярына қатысты шекаралық мүше. Осы тәуелділікті қосу арқылы сәйкес шектерде  $f(T)$  және  $f(R)$  гравитациялық теорияларын қалпына келтіруге болады.  $f(T, B)$  гравитация бірнеше қызықты мүмкіндіктерді ұсынады, олардың көмегімен  $f(T)$  және  $f(R)$  гравитациядан шығатын мәселелерді бір стандартқа сәйкес біріктіруге болады.

Мұнда  $f(T, B)$  телепараллель гравитациясын Нетер теоремасын қолдану арқылы космологиялық шешімдерді зерттейміз. Нетер симметриясының болуы динамиканы азайтуға, содан кейін нақты шешімдерге қол жеткізуге мүмкіндік береді [127, p. 116].

#### 3.3.1 $f(T, B)$ гравитациясындағы әсер және қозғалыс теңдеулері

Әсерді  $f(T)$  функциясымен  $B$  шекаралық мүшесіне де тәуелді деп есептей отырып, келесідей жазуға болады

$$S_{f(T, B)} = \frac{1}{\kappa} \int d^4x e f(T, B) + S_m, \quad (3.56)$$

мұнда  $f$ -скаляр өрістің функциясы болып табылады,  $T$  ширату тензорының скаляры және  $B$  шекаралық мүше. Бұл әсердің мақсаты  $f(T)$  гравитациядан оның метрикалық аналогының  $f(R)$  гравитациясының баламалы теориясын табу мүмкін еместігінен туындайды. Жоғарыда көрсетілген әсерден  $f(R)$  және  $f(T)$  функцияларын сәйкесінше  $f(T, B) = f(-T + B) = f(R)$  және  $f(T, B) = f(T)$  деп қабылдау арқылы қалпына келтіруге болатынын оңай көре аламыз.

Тетрада өрісіне қатысты жоғарыдағы әсерді өзгерту арқылы өріс теңдеулерін аламыз

$$2eE_a^\lambda W f_B - 2eE_a^\sigma \nabla^\lambda \nabla_\sigma f_B + eBE_a^\lambda f_B + 4e[(\partial_\mu f_B) + (\partial_\mu f_T)] S_a^{\mu\lambda} + 4\partial_\mu (eS_a^{\mu\lambda}) f_T - 4ef_T T^{\sigma\mu} S_\sigma^{\lambda\mu} - efE_a^\lambda = 16\pi e T_a^\lambda, \quad (3.57)$$

мұнда  $f_T = \frac{\partial f}{\partial T}$ ,  $f_B = \frac{\partial f}{\partial B}$ ,  $\nabla_\sigma$  -Ливи-Чивита байланысына қатысты коварианттық туынды және  $T_a^\lambda$ -энергия-импульс тензоры. Бұрын айтылғандай, бұл теория  $f(R, T)$ ,  $f(R)$  және  $f(T)$  гравитациясының ерекшеліктерін жинақтай алады.



Біз мұнда  $f(T, B)$  гравитация және скалярлық-тензорлық теориясындағы әсерді төмендегідей қарастырайық

$$S = \int d^4 x e \left( F(\varphi) f(T, B) + \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - V(\varphi) \right), \quad (3.58)$$

мұндағы  $e = \det(e_\mu^a) = \sqrt{-g}$ , ал  $e_\mu^a$  тетрад болып табылады,  $T$  ширату тензорының скаляры,  $B$  шекаралық мүше,  $F(\varphi)$  және  $V(\varphi)$  сәйкесінше скалярлық өрістің гравитация мен өзара әрекеттесу потенциалын көрсететін жалпы функциялар болып табылады.

Сонымен қатар мұнда ФРУ метрикасын қарастырамыз.

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (3.59)$$

Бұл метрика үшін бізде келесі өрнектер бар

$$e = \det(e_\mu^a) = \sqrt{-g} = a^3, \quad T = -6 \frac{\dot{a}^2}{a^2}, \quad B = -6 \frac{\ddot{a}}{a} - 12 \frac{\dot{a}^2}{a^2}, \quad L_\varphi = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - V(\varphi).$$

(3.56) теңдеудегі әсерден Лагранж функциясын келесі түрде аламыз:

$$L = a^3 F(f - f_T T - f_B B) - 6a\dot{a}^2 F f_T + 6a^2 \dot{a} \dot{F} f_B + 6a^2 \dot{a} F (f_{BT} \dot{T} + f_{BB} \dot{B}) + \frac{1}{2} a^3 \dot{\varphi}^2 - a^3 V. \quad (3.60)$$

Өріс теңдеулерін табу үшін Эйлер-Лагранж және нүктелік энергия шарт формулаларынан қолданамыз:

$$\frac{\partial L}{\partial a} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{a}} = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial T} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{T}} = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial B} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{B}} = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 0,$$

$$H = \frac{\partial L}{\partial \dot{a}} \dot{a} + \frac{\partial L}{\partial \dot{T}} \dot{T} + \frac{\partial L}{\partial \dot{B}} \dot{B} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \dot{\varphi} - L = 0.$$

(3.60) теңдеудегі лагранжиан үшін өріс теңдеулерін келесі түрде табамыз:

$$6\frac{\dot{a}}{a}(f_{BT}\dot{T} + f_{BB}\dot{B}) + \left(T - 6\frac{\dot{a}^2}{a^2}\right)f_T + \left(B + 6\frac{\dot{a}\dot{F}}{aF}\right)f_B - f + \frac{1}{F}\left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V\right) = 0, \quad (3.61)$$

$$\begin{aligned} & 2f_{BT}\dot{T}^2 + 2f_{BTB}\dot{T}\dot{B} + 2f_{BBT}\dot{B}\dot{T} + 2f_{BBB}\dot{B}^2 - \\ & - 4\frac{\dot{a}}{a}f_{TT}\dot{T} - 4\frac{\dot{a}}{a}f_{TB}\dot{B} + 4\frac{\dot{F}}{F}f_{BB}\dot{B} + 4\frac{\dot{F}}{F}f_{BT}\dot{T} + 2f_{BT}\ddot{T} + 2f_{BB}\ddot{B} - \\ & - 2\frac{\dot{a}^2}{a^2}f_T - 4\frac{\ddot{a}}{a}f_T - 4\frac{\dot{a}\dot{F}}{aF}f_T + f_T T + 2\frac{\ddot{F}}{F}f_B + f_B B - f - \frac{1}{F}\left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V\right) = 0, \end{aligned} \quad (3.62)$$

$$6\frac{\dot{a}}{a}\dot{B}(f_{BTB} - f_{BBT}) + \left(T + 6\frac{\dot{a}^2}{a^2}\right)f_{TT} + \left(B + 6\frac{\ddot{a}}{a} + 12\frac{\dot{a}^2}{a^2}\right)f_{BT} = 0, \quad (3.63)$$

$$6(f_{BBT} - f_{BTB})\frac{\dot{a}}{a}\dot{T} + \left(T + 6\frac{\dot{a}^2}{a^2}\right)f_{TB} + \left(B + 6\frac{\ddot{a}}{a} + 12\frac{\dot{a}^2}{a^2}\right)f_{BB} = 0, \quad (3.64)$$

$$\ddot{\phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi} + V' + F'\left[\left(T + 6\frac{\dot{a}^2}{a^2}\right)f_T\left(B + 6\frac{\ddot{a}}{a} + 12\frac{\dot{a}^2}{a^2}\right)f_B - f\right] = 0. \quad (3.65)$$

мұнда әріптің үстіндегі нүктелер уақытқа қатысты туынды. Келесі бөлімде (3.61)-(3.65) теңдеулер жүйесін шешуге арналған Нетер теоремасын қолдау әдісін қарастырамыз.

### 3.3.2 $f(T, B)$ гравитациясы үшін Нетер теорема әдісін қолдану

Мұнда белгісіз шамаларды анықтау үшін Нетер теорема әдісін пайдаланамыз. Космологияда бұл теореманы алғашқылардың бірі болып Р. Де Риттис және т.б. [21, р. 3; 22, р. 73] және С. Капазиелло және т.б. [120, р. 123; 121, р. 252, 122, р. 56; 123, р. 450; 124; 125, с. 317; 126, р. 107] өз мақалаларында белгісіз шамаларды анықтау және өріс теңдеулерін шешу үшін қолданған. Жалпы алғанда, Нетер теоремасы, егер  $X$  векторлық өрісі бойымен қозғалып бара жатқан лагранжианның  $L$  Ли алгебрасында туындысы жойылатынын айтады (3.39 теңдеу).

Нетер симметриясының болуы  $X$  векторлық өрісінің болуын білдіреді, сондықтан

$$X = \alpha\frac{\partial}{\partial a} + \beta\frac{\partial}{\partial T} + \gamma\frac{\partial}{\partial B} + \delta\frac{\partial}{\partial \phi} + \dot{\alpha}\frac{\partial}{\partial \dot{a}} + \dot{\beta}\frac{\partial}{\partial \dot{T}} + \dot{\gamma}\frac{\partial}{\partial \dot{B}} + \dot{\delta}\frac{\partial}{\partial \dot{\phi}}, \quad (3.66)$$

Ал олардың туындылары мына өрнек арқылы анықталады:

$$\dot{\alpha} = \frac{\partial \alpha}{\partial a} \dot{a} + \frac{\partial \alpha}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial \alpha}{\partial B} \dot{B} + \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} \dot{\varphi},$$

$$\dot{\beta} = \frac{\partial \beta}{\partial a} \dot{a} + \frac{\partial \beta}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial \beta}{\partial B} \dot{B} + \frac{\partial \beta}{\partial \varphi} \dot{\varphi},$$

$$\dot{\gamma} = \frac{\partial \gamma}{\partial a} \dot{a} + \frac{\partial \gamma}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial \gamma}{\partial B} \dot{B} + \frac{\partial \gamma}{\partial \varphi} \dot{\varphi},$$

$$\dot{\delta} = \frac{\partial \delta}{\partial a} \dot{a} + \frac{\partial \delta}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial \delta}{\partial B} \dot{B} + \frac{\partial \delta}{\partial \varphi} \dot{\varphi}.$$

мұнда  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  және  $\delta$  генераторлары  $a$ ,  $T$ ,  $B$  және  $\varphi$  айнымалылар тәуелді болады. Лагранжианды (3.60) Нетер симметрия (3.66) шартына қойып, келесі теңдеулерді аламыз

$$\begin{aligned} & \alpha + 2a \frac{\partial \alpha}{\partial a} + \beta a \frac{f_{TT}}{f_T} - \\ & - a^2 \frac{f_{BT}}{f_T} \frac{\partial \beta}{\partial a} + \gamma a \frac{f_{TB}}{f_T} - a^2 \frac{f_{BB}}{f_T} \frac{\partial \gamma}{\partial a} + \delta a \frac{F'}{F} - a^2 \frac{F'}{F} \frac{f_B}{f_T} \frac{\partial \delta}{\partial a} = 0, \end{aligned} \quad (3.67)$$

$$6a^2 F f_{BT} \frac{\partial \alpha}{\partial T} = 0, \quad (3.68)$$

$$6a^2 F f_{BB} \frac{\partial \alpha}{\partial B} = 0, \quad (3.69)$$

$$3\alpha + 12F' f_B \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} + 2a \frac{\partial \delta}{\partial \varphi} = 0, \quad (3.70)$$

$$\begin{aligned} & 2\alpha - 2 \frac{f_T}{f_{BT}} \frac{\partial \alpha}{\partial T} + a \frac{\partial \alpha}{\partial a} + \beta a \frac{f_{BTT}}{f_{BT}} + \\ & a \frac{\partial \beta}{\partial T} + \gamma a \frac{f_{BTB}}{f_{BT}} + a \frac{f_{BB}}{f_{BT}} \frac{\partial \gamma}{\partial T} + \delta a \frac{F'}{F} + a \frac{F'}{F} \frac{f_B}{f_{BT}} \frac{\partial \delta}{\partial T} = 0, \end{aligned} \quad (3.71)$$

$$\begin{aligned} & 2\alpha - 2 \frac{f_T}{f_{BB}} \frac{\partial \alpha}{\partial B} + a \frac{\partial \alpha}{\partial a} + \beta a \frac{f_{BBT}}{f_{BB}} + \\ & a \frac{f_{BT}}{f_{BB}} \frac{\partial \beta}{\partial B} + \gamma a \frac{f_{BBB}}{f_{BB}} + a \frac{\partial \gamma}{\partial B} + \delta a \frac{F'}{F} + a \frac{F'}{F} \frac{f_B}{f_{BB}} \frac{\partial \delta}{\partial B} = 0, \end{aligned} \quad (3.72)$$

$$2\alpha - 2\frac{F}{F'}\frac{f_T}{f_B}\frac{\partial\alpha}{\partial\varphi} + a\frac{\partial\alpha}{\partial a} + \beta a\frac{f_{BT}}{f_B} +$$

$$a\frac{F}{F'}\frac{f_{BB}}{f_B}\frac{\partial\beta}{\partial\varphi} + \gamma a\frac{f_{BB}}{f_B} + a\frac{F}{F'}\frac{f_{BB}}{f_B}\frac{\partial\gamma}{\partial\varphi} + \delta a\frac{F''}{F'} + \frac{a^2}{6F'f_B}\frac{\partial\delta}{\partial a} + a\frac{\partial\delta}{\partial\varphi} = 0, \quad (3.73)$$

$$f_{BT}\frac{\partial\alpha}{\partial B} + f_{BB}\frac{\partial\alpha}{\partial T} = 0, \quad (3.74)$$

$$6F'f_B\frac{\partial\alpha}{\partial T} + 6Ff_{BT}\frac{\partial\alpha}{\partial\varphi} + a\frac{\partial\delta}{\partial T} = 0, \quad (3.75)$$

$$6F'f_B\frac{\partial\alpha}{\partial B} + 6Ff_{BB}\frac{\partial\alpha}{\partial\varphi} + a\frac{\partial\delta}{\partial B} = 0, \quad (3.76)$$

$$\left(3\alpha + \delta a\frac{F'}{F}\right)(f - f_T T - f_B B) - \beta a(f_{TT} T + f_{BT} B) - \gamma a(f_{TB} T + f_{BB} B) = 0, \quad (3.77)$$

$$3\alpha V + \delta a V' = 0. \quad (3.78)$$

Бұл дифференциалдық теңдеулерді  $\dot{a}^2$ ,  $\dot{T}^2$ ,  $\dot{B}^2$ ,  $\dot{\varphi}^2$ ,  $\dot{a}\dot{T}$ ,  $\dot{a}\dot{B}$ ,  $\dot{a}\dot{\varphi}$ ,  $\dot{T}\dot{B}$ ,  $\dot{T}\dot{\varphi}$  және  $\dot{B}\dot{\varphi}$ -дегі мүшелерді нөлге теңестіру арқылы алынды.

Жоғарыдағы (3.75) және (3.76) теңдеулерінен біз  $\alpha$  генераторы тек  $a$  және  $\varphi$  айнымалыларға тәуелді екенін көреміз. Онда (3.78) теңдеуді қайта келесі түрде жаза аламыз

$$\alpha = -\frac{1}{3}\delta a\frac{V'}{V}. \quad (3.79)$$

Бұл теңдеулер жүйесінен  $\delta$  генераторы,  $T$  және  $B$  айнымалыларына да тәуелсіз екенін көреміз. Қосымша (3.75) және (3.76) теңдеулерін келесідей қайта жазуға болады

$$f_{BB}\frac{\partial\delta}{\partial T} - f_{BT}\frac{\partial\delta}{\partial B} = 0. \quad (3.80)$$

Ал (3.67)- (3.678) теңдеуден:

$$\beta\frac{f_{TT}}{f_T} - a\frac{f_{BT}}{f_T}\frac{\partial\beta}{\partial a} + \gamma\frac{f_{TB}}{f_T} - a\frac{f_{BB}}{f_T}\frac{\partial\gamma}{\partial a} + \delta\left(\frac{F'}{F} - \frac{V'}{V}\right) - a\left(\frac{F'}{F}\frac{f_B}{f_T} + \frac{2V'}{3V}\right)\frac{\partial\delta}{\partial a} = 0, \quad (3.81)$$

$$\delta \left( \frac{V'}{V} + 4F' f_B \frac{V''}{V} - 4F' f_B \frac{V'^2}{V^2} \right) + 2 \frac{\partial \delta}{\partial \varphi} \left( 2F' f_B \frac{V'}{V} - 1 \right) = 0, \quad (3.82)$$

$$\beta \left( \frac{f_{BT}}{f_{BT}} - \frac{F_{BBT}}{f_{BB}} \right) + \frac{\partial \beta}{\partial T} - \frac{f_{BT}}{f_{BB}} \frac{\partial \beta}{\partial B} + \gamma \left( \frac{f_{BTB}}{f_{BT}} - \frac{f_{BBB}}{f_{BB}} \right) + \frac{f_{BB}}{f_{BT}} \frac{\partial \gamma}{\partial T} - \frac{\partial \gamma}{\partial B} = 0, \quad (3.83)$$

$$\delta \left( \frac{F''}{F'} - \frac{F'V'}{FV} + \frac{2f_T}{3f_B} \frac{V''}{V} - \frac{2f_T}{3f_B} \frac{V'^2}{V} \right) + \left( \frac{F'}{F} + \frac{2f_T}{3f_B} \frac{V'}{V} \right) \frac{\partial \delta}{\partial \varphi} + \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2F'f_B} - \frac{F'V'}{FV} \right) a \frac{\partial \delta}{\partial a} + \beta \frac{F'}{F} \frac{f_{BT}}{f_B} + \frac{f_{BT}}{f_B} \frac{\partial \beta}{\partial \varphi} + \gamma \frac{F'}{F} \frac{f_{BB}}{f_B} + \frac{f_{BB}}{f_B} \frac{\partial \gamma}{\partial \varphi} = 0, \quad (3.84)$$

$$\delta \left( \frac{F'}{F} - \frac{V'}{V} \right) (f - f_T T - f_B B) - \beta (f_{TT} T + f_{BT} B) - \gamma (f_{TB} T + f_{BB} B) = 0, \quad (3.85)$$

Төменде осы теңдеулер жүйесін қанағаттандыратын  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  генераторлары мен іздестіріліп отырған белгісіз  $F(\varphi), V(\varphi), f(T, B)$  функциялары үшін дербес жағдайдағы шешімдер анықталды:

$$\alpha = \alpha_0 a^n \varphi, \quad (3.86)$$

$$\delta = \alpha_0 \delta_0 a^{n-1} \varphi^2, \quad (3.87)$$

$$\beta = \alpha_0 \beta_0 a^{n-1} \varphi^2 T, \quad (3.88)$$

$$\gamma = \alpha_0 \gamma_0 a^{n-1} \varphi^2 B \quad (3.90)$$

$$f(T, B) = C_1 T + C_2 B, \quad (3.91)$$

$$V = V_0 \varphi^m \quad (3.92)$$

Мұндағы  $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0, V_0$  және  $n, m$  белгісіз тұрақтылар, ал  $F=1$  деп қарастырып. Осы алынған шешімдерді (3.61)- (3.65) қозғалыс теңдеулеріне қолданамыз.

$$6C_1 \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{1}{2} \dot{\varphi} - V_0 \varphi^m = 0, \quad (3.93)$$

$$4C_1 \frac{\ddot{a}}{a} + 2C_1 \frac{\dot{a}}{a^2} + \frac{1}{2} \dot{\varphi} - V_0 \varphi^m = 0, \quad (3.94)$$

$$\ddot{\varphi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\varphi} - V_0 m \varphi^{m-1} = 0 \quad (3.95)$$

Осы теңдеулерден  $m = 2$  болғанда, келесі шешімдерді аламыз

$$\varphi(t) = C_1 e^{\left(-\frac{3}{2}a_0 + \frac{1}{2}\sqrt{9a_0^2 - 8V_0}\right)t} + C_2 e^{\left(-\frac{3}{2}a_0 - \frac{1}{2}\sqrt{9a_0^2 - 8V_0}\right)t}$$

$$\dot{a} - a_0 a = 0, \quad (3.96)$$

Мұндағы  $a_0$  белгісіз тұрақты. (3.96) теңдеуден масштабты факторды табамыз

$$a(t) = C_1 e^{a_0 t} \quad (3.97)$$

мұндағы  $C_1$  интегралдау тұрақтысы. Бұл шешім космологияда де Ситтер шешімі болып табылады. Онда Хаббл параметрін келесідей табамыз

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = H_0 = \text{const}, \quad \dot{H} = 0. \quad (3.98)$$

Соңғы бақылау деректеріне сәйкес Хаббл параметрі, Хаббл миссиясынан алынған мәліметке сәйкес  $H_0 = 73.52 \pm 1.62 \text{ км с}^{-1} \text{ Мпк}$ , ал Планк миссиясы бойынша  $H_0 = 67.40 \pm 0.5 \text{ км с}^{-1} \text{ Мпк}$  мәніне тең.

Осы теңдеулерді қолданып энергия тығыздығы мен қысымды табамыз

$$\rho = 3a_0^2, \quad p = -3a_0^2. \quad (3.99)$$

Анықталған шамаларды қолданып Идеал сұйықтың күй теңдеуін келесі түрде анықтаймыз

$$p = \omega \rho, \quad (3.100)$$

мұндағы  $\omega$  идеал сұйықтықтың күй теңдеуінің параметрі болып табылады. Қарастырған космологиялық модель үшін сәйкес бұл параметр:

$$\omega = -1. \quad (3.101)$$

Бұл алынған шешім КЭ моделіне сәйкес келеді.

Сонымен бұл тарауда телепараллель гравитация аясында скалярлық өріспен толтырылған жазық біртекті Әлемнің екі моделін қарастырдық. Алдымен біз қозғалыс теңдеулерін анықтап, сосын Нетер теоремасын қолдау

әдісін пайдаланып  $F(\varphi)$  байланыс функциясын,  $V(\varphi)$  потенциалдық энергияның және  $f(T, B)$  функциясы үшін нақты шешімдерді анықтадық. Осы анықталған шешімдерді қозғалыс теңдеулеріне қолдау арқылы  $\varphi$  скалярлық өріс пен  $a$  масштабты фактордың  $t$  уақытқа тәуелді шешімдерін алдық. Анықталған масштабты фактордың шешімі де Ситтер шешімі болып табылады және ол экспонента заңы бойынша өзгереді, ал потенциалдық энергия Әлем үдемелі ұлғаю кезінде баяу кемиді. Қорытындай келе осы тарауда алынған шешімдер Әлемнің кейінгі ұлғаюын сипаттауға мүмкіндік береді және КЭ моделіне сәйкес келеді. Бірақ КЭ табиғаты әлі нақты анықталмаған. Себебі, КЭ-ның құрайтын элементар бөлшектер бариондық бөлшектермен байланыс жасамайды.

## 4 ФЕРМИОНДЫҚ ӨРІСІ БАР ГРАВИТАЦИЯ ТЕОРИЯЛАРЫНДАҒЫ ӘЛЕМНІҢ ЭВОЛЮЦИЯСЫ

Бұл тарауда фермиондық өріс пен толтырылған жазық және біртекті Фридман Әлемінің гравитациясының модификацияланған теориялары аясында қарастырамыз. Жазық және біртекті Фридман Әлемі негізгі космологиялық моделдердің бір болып табылады және ол бақылау деректерімен жақсы үйлесімді. Себебі, үлкен масштабтарда Әлемді жазық, біртекті және изотропты деп есептеуге болады. Мұнда біз қозғалыс теңдеулерін анықтау үшін вариациялық әдісті пайдаланамыз. Осы анықталған теңдеулер төртінші ретті сызықты емес дифференциалдық теңдеулер болып табылады. Оларды аналитикалық жолмен шешу күрделі, сондықтан біз мұнда элементар бөлшектер физикасында қолданылатын Нетер теоремасын қолданамыз. Осы әдістің көмегімен байланыс функциясы мен потенциалдық энергия үшін қарастырып отырған модельдердің нақты шешімдерін табамыз. Соңында масштабты фактор мен фермиондық өрісті сипаттайтын шамалардың уақытқа тәуелді байланысы анықталады.

### 4.1 Нетер теоремасын фермиондық өрісте $f(R)$ гравитациясының кейбір қосымшаларында қолдану

Қазіргі астрофизика мен космологияның іргелі мәселелерінің бірі - Әлемнің эволюциясының динамикасын сипаттау. Альберт Эйнштейн жасаған ЖСТ-сы біздің Әлемнің динамикасын сипаттайтын негізгі теорияларының бірі болып табылады. Бұл гравитациялық теория  $R$  Риччи скаляры мен  $g_{ik}$  метрикалық тензорға негізделген. Сонымен қатар, бұл теорияның тиімділігі көптеген астрофизикалық бақылаулар мен тәжірибелермен расталады. Алайда, жақында анықталған екінші фазалы Әлемнің үдемелі ұлғаюын түсіндіру қиын мәселе. Соңғы уақытта ғалымдар ЖСТ-ның әртүрлі модификацияланған және альтернативті теорияларын ұсынуда. Гравитацияның модификацияланған теориялары болып  $f(R)$  гравитация,  $f(T)$  гравитация,  $f(R,T)$  гравитациясы, Хорав-Лифшиц гравитациясы, Гаусс-Бонне гравитациясы болып табылады [130-133]. Сондай-ақ, соңғы жылдары фермиондық өрісі бар космологиялық модельдерге үлкен қызығушылық артты [134-139]. Фермиондық өрістер Дирак теңдеуі арқылы сипатталады.

Бұл бөлімде біз  $f(R)$  теорияларының аясында фермиондық өріспен толтырылған жазық және біртекті Әлемнің моделін қарастырамыз, мұнда фермиондық өріс гравитациялық өріспен минималды емес байланыс жасайды. Бұл бөлімде біз сигнатураны  $(+,-,-,-)$  және  $c = \hbar = 1$  натурал бірлікті қабылдадық. Біз сондай-ақ  $0,1,2,3$  мәндерін қабылдайтын  $i, j, k$  индекстерді қолданамыз.



#### 4.1.1 $f$ - эссенциялы $f(R)$ гравитациясы

Кеңістік-уақыттың төрт өлшемі үшін  $f(R)$  гравитациялық әсер келесідей жазылады

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} [f(R) + L_m] \quad (4.1)$$

мұндағы  $g = \det(g_{ik})$  метрикалық тензордың анықтаушысы,  $f(R)$  функциясы Риччи скаляры  $R$  -ге байланысты,  $L_m$  лагранжиан материясы және біздің жағдай үшін  $8\pi G = 1$ . Жоғарыдағы (4.1) әсердің  $g_{ik}$  метрикалық тензор бойынша вариациясы келесідей қозғалыс теңдеуін береді

$$f'(R)R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}f(R) - \nabla^i \nabla_k f'(R) + g_{ik} W f'(R) = kT_{ik} \quad (4.2)$$

мұнда штрих Риччи скаляры  $R$  бойынша туындыны білдіреді және  $R_{ik}$  -Риччи тензоры,  $k$  - гравитациялық бірліктердегі байланыс тұрақтысы. Сонымен қатар,  $W = \nabla^i \nabla_k$ ,  $\nabla_k$  - коварианты туынды, ал  $T_{\mu\nu}$  - энергия-импульс тензоры болып табылады және ол келесі түрде жазылады

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} L_m)}{\delta g^{\mu\nu}} = g_{\mu\nu} L_m - 2 \frac{\partial L_m}{\partial g^{\mu\nu}}.$$

$f(R)$  гравитация шеңберіндегі минималды байланысты емес фермиондық өріс моделіне арналған әсерді келесі түрде жазамыз [152],

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \{F(u) f(R) + 2K(Y, u)\}, \quad (4.3)$$

мұнда  $\psi$  және  $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$  фермионды өріс және оның түйіндесі,  $u = \bar{\psi} \psi$ ,  $F(u)$  - гравитация мен фермиондық өрістің байланысын білдіретін жалпы функция,  $K$  - фермион өрісінің Лагранж тығыздығы.

Канондық кинетикалық мүшесі келесі түрде жазылады

$$Y = \frac{1}{2} i [\bar{\psi} \Gamma^\mu D_\mu \psi - (D_\mu \bar{\psi}) \Gamma^\mu \psi], \quad (4.4)$$

мұнда  $\Gamma^\mu = e_a^\mu \gamma^a$  - Дирак-Паулидің жалпыланған матрицалары Клиффорд алгебрасын қанағаттандырады  $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$  фигуралы жақшалар антикоммутациялық қатынасты білдіреді,  $e_a^\mu$  ковариантты туындылар келесі формула арқылы беріледі

$$D_\mu \psi = \partial_\mu \psi - \Omega_\mu \psi$$

және

$$D_\mu \bar{\psi} = \partial_\mu \bar{\psi} + \bar{\psi} \Omega_\mu.$$

Фермиондық байланыстың  $\Omega_\mu$  формуласы

$$\Omega_\mu = -\frac{1}{4} g_{\rho\sigma} [\Gamma_{\mu\delta}^\rho - e_b^\rho \partial_\mu e_\delta^b] \Gamma^\sigma \Gamma^\delta,$$

мұнда  $\Gamma_{\mu\delta}^\rho$  Кристоффель символы.

Кеңістіктік-уақыттың жазық ФРУ метрикасының қарапайым біртекті және изотропты космологиялық моделін қарастырамыз

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (4.5)$$

мұнда  $a(t)$ -масштабты фактор. Бұл метрика үшін  $(e_a^\mu) = \text{diag}(1, 1/a, 1/a, 1/a)$  және  $(e_\mu^a) = \text{diag}(1, a, a, a)$  осы мәндерді қабылдайды.

$$\sqrt{-g} = a^3, \quad R = 6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right), \quad Y = 0.5(\bar{\psi}\gamma^0\dot{\psi} - \dot{\bar{\psi}}\gamma^0\psi).$$

нүкте уақыт бойынша туындыны білдіреді. ФРУ метрикасы үшін (4.5) теңдеудегі нүктелік лагранжианды келесі түрде жазуға болады

$$L = a^3 Ff - a^3 FRf_R - 6a\dot{a}^2 Ff_R - 6a^2 \dot{a}F' \dot{f}_R - 6a^2 \dot{a}RFf_{RR} + 2a^3 K \quad (4.6)$$

спинор өріс тек уақытқа байланысты, ал штрих сызықты емес функцияның  $u$  бойынша туындысын білдіреді. Әсер (4.3) және (4.5) теңдеудегі метриканы пайдаланып қарастырылып отырған модель үшін қозғалыс теңдеулерін келесідей анықтаймыз

$$3\frac{\dot{a}}{a}\dot{R}f_{RR} + \left(3\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 3\frac{\dot{a}F'}{aF} - \frac{1}{2}R\right)f_R + \frac{1}{2}f = \frac{1}{F}\rho_f, \quad (4.7)$$

$$f_{RRR}\dot{R}^2 + \left[\ddot{R} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{F}}{F}\right)\dot{R}\right]f_{RR} + \left(2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{F}}{F} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2\frac{\dot{a}\dot{F}}{aF} - \frac{1}{2}R\right)f_R + \frac{1}{2}f = \frac{1}{F}p_f, \quad (4.8)$$

$$K_Y \dot{\psi} + \frac{1}{2} \left( 3 \frac{\dot{a}}{a} K_Y + \dot{K}_Y \right) \psi - i K_u \psi \gamma^0 + \frac{i}{2} \left[ \left( R - 6 \frac{\ddot{a}}{a} - 6 \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) F' \psi \gamma^0 - 6 \frac{\dot{a}}{a} (F')_{,t} \psi \gamma^0 + 6 \frac{\dot{a}}{a} (F')_{,\psi} \dot{u} \gamma^0 \right] f_R - \frac{1}{2} i f F' \psi \gamma^0 = 0, \quad (4.9)$$

$$K_Y \dot{\bar{\psi}} + \frac{1}{2} \left( 3 \frac{\dot{a}}{a} K_Y + \dot{K}_Y \right) \bar{\psi} + i K_u \bar{\psi} \gamma^0 - \frac{i}{2} \left[ \left( R - 6 \frac{\ddot{a}}{a} - 6 \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) F' \bar{\psi} \gamma^0 - 6 \frac{\dot{a}}{a} (F')_{,t} \bar{\psi} \gamma^0 + 6 \frac{\dot{a}}{a} (F')_{,\psi} \dot{u} \gamma^0 \right] f_R + \frac{i}{2} f F' \bar{\psi} \gamma^0 = 0, \quad (4.10)$$

мұнда  $\rho_f = V$  энергия тығыздығы,  $\rho_f = YK_Y - K$  фермиондық өріс үшін қысым болып табылады. Келесі бөлімде  $f(R)$  функциясы,  $F(u)$  байланыс функциясы және  $K(Y, u)$  функцияларын табу үшін Нетер теоремасын қолданамыз.

4.1.2 Нетер теорема әдісін  $f(R)$  гравитация мен  $f$  - эссенцияда қолдану

ФРУ-дің (4.5) теңдеудегі метрикасына арналған лагранжианды  $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)^T$  спинорлық өрістің компоненттері және оның түйіндестері арқылы  $\bar{\psi} = (\psi_1^+, \psi_2^+, \psi_3^+, \psi_4^+)$  көрсетуге болады, (4.6) теңдеудегі нүктелік лагранжианды осы шамаларды ескеріп келесі түрде қайта жазуға болады

$$L = a^3 Ff - a^3 FRf_R - 6a\dot{a}^2 Ff_R - 6a^2 \dot{a} F' f_R \psi_i^+ \psi_i - 6a^2 \dot{a} F' f_R \psi_i^+ \bar{\psi}_i - 6a^2 \dot{a} \dot{R} Ff_{RR} + 2a^3 K. \quad (4.11)$$

Симметрия физикада маңызды рөл атқарады, өйткені ол жүйе қозғалысын сақталу заңдарымен тікелей байланыстырады. Нетер теоремасын алғаш рет космологиялық модельдер мен гравитация теорияларында [24, р. 86] жұмыста қолданды. Бұл әдісте Ли алгебрасында берілген векторлық өрістегі  $X$  Лагранж функциясының  $L$  туындысы нөлге айналатындығы айтылады, яғни.

$$XL = 0. \quad (4.12)$$

$X$  векторлық өрісі (4.12) келесідей сипатталады

$$X = \alpha \frac{\partial}{\partial a} + \beta \frac{\partial}{\partial R} + \dot{\alpha} \frac{\partial}{\partial \dot{a}} + \dot{\beta} \frac{\partial}{\partial \dot{R}} + \sum_{i=0}^3 \left( \eta_i \frac{\partial}{\partial \psi_i} + \dot{\eta}_i \frac{\partial}{\partial \dot{\psi}_i} + \chi_i \frac{\partial}{\partial \psi_i^+} + \dot{\chi}_i \frac{\partial}{\partial \dot{\psi}_i^+} \right), \quad (4.13)$$

мұнда

$$\dot{\alpha} = \frac{\partial \alpha}{\partial a} \dot{a} + \frac{\partial \alpha}{\partial R} \dot{R} + \sum_{i=0}^3 \left( \frac{\partial \alpha}{\partial \psi_i} \dot{\psi}_i + \frac{\partial \alpha}{\partial \psi_i^+} \dot{\psi}_i^+ \right), \quad (4.14)$$

$$\dot{\beta} = \frac{\partial \beta}{\partial a} \dot{a} + \frac{\partial \beta}{\partial R} \dot{R} + \sum_{i=0}^3 \left( \frac{\partial \beta}{\partial \psi_i} \dot{\psi}_i + \frac{\partial \beta}{\partial \psi_i^+} \dot{\psi}_i^+ \right), \quad (4.15)$$

$$\dot{\eta}_i = \frac{\partial \eta_i}{\partial a} \dot{a} + \frac{\partial \eta_i}{\partial R} \dot{R} + \sum_{j=0}^3 \left( \frac{\partial \eta_i}{\partial \psi_j} \dot{\psi}_j + \frac{\partial \eta_i}{\partial \psi_j^+} \dot{\psi}_j^+ \right), \quad (4.16)$$

$$\dot{\chi}_i = \frac{\partial \chi_i}{\partial a} \dot{a} + \frac{\partial \chi_i}{\partial R} \dot{R} + \sum_{j=0}^3 \left( \frac{\partial \chi_i}{\partial \psi_j} \dot{\psi}_j + \frac{\partial \chi_i}{\partial \psi_j^+} \dot{\psi}_j^+ \right), \quad (4.17)$$

сәйкесінше  $\alpha, \beta, \eta_j, \chi_j$  шамалары келесі айнымалыларға тәуелді  $a, R, \psi_j, \psi_j^+$  генераторлар болып табылады. Егер де (4.11) Лагранжев функциясын (4.12) теңдеуге қолдансақ, онда келесідей теңдеулер жүйесін аламыз

$$\begin{aligned} & \alpha f_R + 2a f_R \frac{\partial \alpha}{\partial a} + \beta a f_{RR} - a^2 f_{RR} \frac{\partial \beta}{\partial a} + \\ & a f_R \frac{F_u}{F} \sum_{i=0}^3 (\varepsilon_i \eta_j \psi_j^+ + \varepsilon_i \chi_j \psi_j) - a^2 f_R \frac{F_u}{F} \sum_{i=0}^3 \left( \frac{\partial \eta_j}{\partial a} \psi_j^+ + \frac{\partial \chi_j}{\partial a} \psi_j \right) = 0, \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$-6a^2 f_{RR} \frac{\partial \alpha}{\partial R} = 0, \quad (4.19)$$

$$-6a^2 f_R F_u \psi_i^+ \frac{\partial \alpha}{\partial \psi_i} = 0, \quad (4.20)$$

$$-6a^2 f_R F_u \psi_i \frac{\partial \alpha}{\partial \psi_j^+} = 0, \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} & 2\alpha f_{RR} + 2f_R \frac{\partial \alpha}{\partial R} + a f_{RR} \frac{\partial \alpha}{\partial a} + \beta a f_{RRR} + a f_{RR} \frac{\partial \beta}{\partial R} + \\ & a f_{RR} \frac{F_u}{F} \sum_{i=0}^3 (\varepsilon_j \eta_j \psi_j^+ + \varepsilon_j \chi_j \psi_j) + a f_R \frac{F_u}{F} \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial \eta_j}{\partial R} \psi_j^+ + \frac{\partial \chi_j}{\partial R} \psi_j \right) = 0, \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} & \left( 2\alpha f_R + af_R \frac{\partial \alpha}{\partial a} + \beta af_{RR} \right) F_u \psi_j^+ + af_R \sum_{i=0}^3 \left( \frac{\partial F_u}{\partial \psi_i} \eta_i + \frac{\partial F_u}{\partial \psi_i^+} \chi_i \right) \psi_i^+ + \\ & af_R F_u \chi_j + 2Ff_R \frac{\partial \alpha}{\partial \psi_j} + aFf_{RR} \frac{\partial \beta}{\partial \psi_j} + af_R F_u \sum_{i=0}^3 \left( \frac{\partial \eta_j}{\partial \psi_i} \psi_i^+ + \frac{\partial \chi_i}{\partial \psi_i} \psi_i \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} & \left( 2\alpha f_R + af_R \frac{\partial \alpha}{\partial a} + \beta af_{RR} \right) F_u \psi_i + af_B \sum_{i=0}^3 \left( \eta_j \frac{\partial F_u}{\partial \psi_i^+} + \chi_j \frac{\partial F_u}{\partial \psi_i^+} \right) \psi_i + af_R F_u \eta_i + \\ & + 2Ff_R \frac{\partial \alpha}{\partial \psi_j^+} + aFf_{RR} \frac{\partial \beta}{\partial \psi_j^+} + af_R F_u \sum_{i=0}^3 \left( \frac{\partial \eta_i}{\partial \psi_i^+} \psi_i^+ + \frac{\partial \chi_i}{\partial \psi_i^+} \psi_i \right) = 0, \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$\sum_{i=1}^3 \left( Ff_{RR} \frac{\partial \alpha}{\partial \psi_i} + F_u f_B \frac{\partial \alpha}{\partial R} \psi_i^+ \right) = 0, \quad (4.25)$$

$$\sum_{i=1}^3 \left( Ff_{RR} \frac{\partial \alpha}{\partial \psi_j^+} + F_u f_R \frac{\partial \alpha}{\partial R} \psi_i \right) = 0, \quad (4.26)$$

$$\sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial \alpha}{\partial \psi_j} \psi_i + \frac{\partial \alpha}{\partial \psi_j^+} \psi_i^+ \right) = 0, \quad (4.27)$$

$$\sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial \eta_j}{\partial a} \psi_j^+ - \frac{\partial \chi_j}{\partial a} \psi_j \right) = 0, \quad (4.28)$$

$$\sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial \eta_j}{\partial R} \psi_j^+ - \frac{\partial \chi_j}{\partial R} \psi_j \right) = 0, \quad (4.29)$$

$$3\alpha \psi_j^+ + a\chi_j + a \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial \eta_j}{\partial \psi_i} \psi_i^+ - \frac{\partial \chi_i}{\partial \psi_i} \psi_i \right) = 0, \quad (4.30)$$

$$3\alpha \psi_j + a\eta_j - a \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial \eta_i}{\partial \psi_j^+} \psi_j^+ - \frac{\partial \chi_j}{\partial \psi_j^+} \psi_j \right) = 0, \quad (4.31)$$

$$3\alpha(f - Rf_R) - \beta a Rf_{RR} + a \frac{F_u}{F} (f - Rf_R) \sum_{i=1}^3 (\varepsilon_i \eta_i \psi_i^+ + \varepsilon_i \chi_i \psi_i) = 0, \quad (4.32)$$

$$3\alpha(K - YK_Y) + aK_u \sum_{i=1}^3 (\varepsilon_i \eta_i \psi_i^+ + \varepsilon_i \chi_i \psi_i) = 0. \quad (4.33)$$

Математикалық амалдарды қолданып белгілі бір есептеулерден кейін генераторлар үшін келесі дербес шешімдерді табамыз

$$\alpha = \alpha_0 a^{\frac{1}{3}}, \quad (4.34)$$

$$\beta = 2\alpha_0 a^{-\frac{2}{3}} R, \quad (4.35)$$

$$\eta_j = -\left(\frac{3}{2}\alpha_0 a^{-\frac{2}{3}} + \varepsilon_j \eta_0\right) \psi_j, \quad (4.36)$$

$$\chi_j = -\left(\frac{3}{2}\alpha_0 a^{-\frac{2}{3}} - \varepsilon_j \eta_0\right) \psi_j^+, \quad (4.37)$$

мұнда  $\alpha_0$  және  $\eta_0$  - интегралдау тұрақтылары. Ал  $F$ ,  $K$  және  $f$  функцияларын келесі түрде анықтаймыз

$$F = F_0 u^{\frac{5}{3}}, \quad (4.38)$$

$$K = K_0 (Y - \nu u) \quad (4.39)$$

$$f = C_1 R \quad (4.40)$$

мұнда  $F_0, K_0, \nu$  және  $C_1$  тұрақты шамалар.

#### 4.1.3 $f(R)$ гравитация мен $f$ -эссенция үшін космологиялық шешімдер

Нетер теоремасын қолданып  $F$ ,  $K$  және  $f$  функцияларының нақты түрін таптық. Енді, қозғалыс теңдеулерін шешуге және нақты космологиялық шешімдерді табуға дайынбыз. Бірінші қадам ретінде өріс теңдеулеріне (4.38), (4.39) және (4.40) шешімдерін (4.8) және (4.9) теңдеулеріне қолданамыз. Сонда бізде

$$\ddot{u} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{u} = 0, \quad (4.41)$$

осы теңдеуді интегралдайтын болсақ келесі шешімді аламыз

$$u = \frac{u_0}{a^3} \quad (4.42)$$

мұндағы  $u_0$  интегралдау тұрақтысы.

Жоғарыда (4.38)-(4.40) және (4.42) анықталған шешімдерді (4.10) қозғалыс теңдеуіне қолданып төмендегі теңдеуді аламыз

$$\dot{a} = a_0 a \quad (4.43)$$

Бұл теңдеудің шешімі келесі түрде жазылады

$$a(t) = \lambda e^{a_0 t}, \quad (4.44)$$

мұндағы  $a_0$  және  $\lambda$  интегралдау тұрақтылары

$$a_0 = \frac{v}{2F_0 u^{\frac{2}{3}} C_1}. \quad (4.45)$$

Хаббл параметрін (4.44) және (4.45) формулаларын қолданып анықтайтын болсақ

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = a_0 \lambda, \quad (4.46)$$

Сонымен қатар, энергия тығыздығы мен қысымды келесі формада табамыз

$$\rho = 3H^2 = 3(a_0 C_2)^2, \quad (4.47)$$

$$p = -3H^2 - 2\dot{H} = -3(a_0 C_2)^2. \quad (4.48)$$

Біздің модель үшін күй параметрінің теңдеуін келесідей анықтауға болады

$$\omega = \frac{p}{\rho} = -\frac{3(a_0 C_2)^2}{3(a_0 C_2)^2} - 1. \quad (4.49)$$

Бұл бөлімді қорытындылай келе, фермиондық өріс КЭ сияқты әрекет етеді.

ФРУ кеңістік-уақыт метрикасы үшін  $f(R)$  гравитациясында  $f$  – эссенция моделін зерттедік. Бұл модель үшін нүктелік лагранжиан және сәйкес өріс теңдеулері анықталды. Нетер теорема әдісін қолдана отырып  $F$ ,  $K$  және  $f$  функцияларының шешімдері алынды. Осы анықталған шамаларды қолданып, қарастырылған модель үшін космологиялық шешімдер табылды. Бұл шешімдер, Әлемнің кейінгі үдемелі ұлғаюын сипаттайтыны көрсетілді.

## 4.2 Нетер теорема әдісін фермиондық өрісі бар $f(T, B)$ телепараллель гравитациясында қолдану

Қазіргі космологияда қол жетімді бақылау деректерін сипаттау үшін гравитацияның әртүрлі модификацияланған теорияларды қолданамыз. Сондай-ақ Эйнштейн-Гильберт әсерінің жалпы модификациялары қарастырылады. Егер тек гравитация құрамдастарын өзгертетін модельдер қарастырсақ олар:  $f(R)$  гравитациясы, мұндағы  $R$  Риччи скаляры,  $f(T)$  гравитациясы, мұндағы  $T$  ширату скаляры,  $f(G)$  гравитациясы мұнда  $G$  Гаусса-Бонне инварианты және тағы басқалар [32, p. 169; 33, p. 199, 34, p. 25].

Ал егер, материяның түрлері және олардың модификациялары бар модельдер қарастырсақ олар: квинтэссенция, фантомдық өріс, тахион өрісі,  $k$  эссенция және тағы басқалар [139-153]. Барлық осы модельдер біздің Әлемнің динамикасын әртүрлі әдістермен сипаттайды, бірақ тек бақылау деректері бізге ең жақсы үлгіні таңдауға мүмкіндік береді.

Мұндай модельдердің қозғалыс теңдеулері жоғары ретті сызықты емес дифференциалдық теңдеулер болып табылады, әдетте олардың нақты шешімдерін алу өте қиын мәселе. Космологияда Нетер теорема әдісін қолдану осындай қозғалыс теңдеулерін шешудің бір жолы болып есептелінеді. Фермиондық өрістері бар космологиялық модельдерде Нетер теоремасын келесі жұмыстарда қолданылған [150, p. 151, p. 628; 152, p. 20]. Соңғы уақытта  $f(T, B)$  телепараллельдік космологияда да Нетер теоремасы қолданылуда [153, p. 5].

### 4.2.1 $f(T, B)$ телепараллель гравитациядағы әсер және қозғалыс теңдеулері

Бұл бөлімде гравитациялық өріспен минималды емес байланысқан фермиондық өрістің  $f(T, B)$  телепараллель гравитация моделін біртекті, жазық және изотропты Фридман Әлемінде қарастырамыз. Риччи скаляры  $R$  мен ширату скаляры  $T$  шекаралық мүше арқылы байланысады

$$R = -T + \frac{2}{e} \partial_{\mu} (e T^{\mu}) = -T - B,$$

мұндай байланысты  $B = (2/e) \partial_{\mu} (e T^{\mu}) = \nabla_{\mu} T^{\mu}$  деп енгізілген. Ширату скалярына  $T$  және шекаралық мүшесіне  $B$  қатысты минималды байланыста емес фермиондық өріске арналған әсерді келесі түрде жазамыз



$$S = \int d^4 x e \{ F(u) f(T, B) + \frac{i}{2} [\bar{\psi} \Gamma^\mu (\bar{\partial}_\mu - \Omega_\mu) \psi - \bar{\psi} (\bar{\partial}_\mu + \Omega_\mu) \Gamma_\mu \psi] - V(u) \}, \quad (4.50)$$

мұнда  $e = \det(e_\mu^a) = \sqrt{-g}$ , ал  $e_\mu^a$  тетрада базисі,  $\psi$  және  $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$  спинорлық өрісті және онымен біріктірілген комплексті түйіндесі. Гравитациямен байланысын және сәйкесінше фермиондық өрістің өзіндік әсер ету потенциалын білдіретін  $V(u)$  және  $F(u)$  жалпыланған функциялар.  $F$  және  $V$  функциялары тек қана сызықты емес  $u = \bar{\psi} \psi$  функциясына қатысты,  $\Gamma^\mu = e_\mu^a \gamma^a$  Дирак-Паулидың жалпыланған матрицалары. Олар Клиффорд алгебрасын қанағаттандырады,  $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$  мұндағы фигуралық жақша антикоммутациялық қатынасты білдіреді. Коварианты туынды  $e_\mu^a$  келесі түрде беріледі

$$D_\mu \psi = \partial_\mu \psi - \Omega_\mu \psi,$$

$$D_\mu \bar{\psi} = \partial_\mu \bar{\psi} + \bar{\psi} \Omega_\mu$$

фермионды байланыс  $\Omega_\mu$  келесі формуламен анықталынады

$$\Omega_\mu = -\frac{1}{4} g_{\rho\sigma} [\Gamma_{\mu\delta}^\rho - e_b^\rho \partial_\mu e_\delta^b] \Gamma^\sigma \Gamma^\delta, \text{ мұндағы } \Gamma_{\mu\delta}^\rho \text{ Кристоффель символын білдіреді.}$$

Сонымен бірге ФРУ метрикасын қарастырамыз

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (4.51)$$

Бұл метрика үшін тетрада тензорының компонентері келесі түрде жазылады

$$(e_\mu^a) = \text{diag}(1, a, a, a), \quad (e_a^\mu) = \text{diag}(1, 1/a, 1/a, 1/a).$$

Қисық кеңістік-уақыт  $\Gamma^\mu$  үшін Дирак матрицалары ( $j=1,2,3$ )

$$\Gamma^0 = \gamma^0, \quad \Gamma^j = a^{-1} \gamma^j, \quad \Gamma^5 = -i\sqrt{g} \Gamma^0 \Gamma^1 \Gamma^2 \Gamma^3 = \gamma^5,$$

$$\Gamma_0 = \gamma^0, \quad \Gamma_j = a \gamma^j.$$

Демек,

$$\Omega_0 = 0, \quad \Omega_j = \frac{1}{2} \dot{a} \gamma^j \gamma^0.$$

Дирак матрицалары негізінде жазылатын гамма матрицалар:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix},$$

мұнда  $I = \text{diag}(1,1)$  және  $\sigma^k$  Паули матрицалары, келесі түрде жазамыз:

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.52)$$

Сәйкес лагранжиан көбейткіштерін таңдау және жоғары ретті туындыларды болдырмау үшін бөліктер бойынша интегралдау әдісін қолданып  $L$  лагранжианды канондық түрде алу үшін әсерді келесі түрде жазамыз

$$S = \int d^4 x e \left[ Ff - \lambda_1 \left( T + 6 \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) - \lambda_2 \left( B + 6 \frac{\ddot{a}}{a} + 12 \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) + \frac{i}{2} (\bar{\psi} \gamma^0 \dot{\psi} - \dot{\bar{\psi}} \gamma^0 \psi) - V \right]. \quad (4.53)$$

Жоғарыдағы (4.51) теңдеудегі ФРУ метрикасы үшін ширату скалярының және шекаралық мүшенің мәндері

$$T = -6 \frac{\dot{a}^2}{a^2}, \quad B = -6 \left( \frac{\ddot{a}}{a} + 2 \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right)$$

Лагранждың екі факторға қатысты екенін ескеріп. Әсерді  $T$  және  $B$  бойынша вариацияласақ

$$\lambda_1 = F(u) \frac{\partial f(T, B)}{\partial T} = Ff_T, \quad \lambda_2 = F(u) \frac{\partial f(T, B)}{\partial B} = Ff_B, \quad (4.54)$$

сонда жоғарыда көрсетілген әсерді төмендегідей жазамыз

$$S = \int d^4 x \left\{ Fa^3 f - Fa^3 T f_T - 6Fa \dot{a}^2 f_T - Fa^3 B f_B + 6\dot{F} a^2 \dot{a} f_B + \right. \\ \left. + 6Fa^2 \dot{a} \dot{T} f_{BT} + 6Fa^2 \dot{a} \dot{B} f_{BB} + a^3 \left[ \frac{i}{2} (\bar{\psi} \gamma^0 \dot{\psi} - \dot{\bar{\psi}} \gamma^0 \psi) - V \right] \right\} \quad (4.55)$$

Қарастырылып отырған модель үшін нүктелік лагранжианды (4.51) және (4.55) теңдеулерінің көмегімен келесі түрде анықтаймыз

$$L = Fa^3 f - Fa^3 Tf_T - 6Fa\dot{a}^2 f_T - Fa^3 Bf_B + 6\dot{F}a^2 \dot{a}f_B + 6Fa^2 \dot{a}\dot{T}f_{BT} + 6Fa^2 \dot{a}\dot{B}f_{BB} + \frac{i}{2}a^3(\bar{\psi}\gamma^0\dot{\psi} - \dot{\bar{\psi}}\gamma^0\psi) + a^3V. \quad (4.56)$$

мұнда метриканың біртектілігі мен изотроптылығына байланысты спинор өрісі тек уақытқа тәуелді деп есептеледі, яғни  $\psi = \psi(t)$ .

Эйлер-Лагранж теңдеулерімен энергетикалық күй теңдеуі пайдаланып келесідей қозғалыс теңдеулер жүйесін аламыз

$$6\frac{\dot{a}}{a}(\dot{T}f_{BT} + \dot{B}f_{BB}) + \left(T - 6\frac{\dot{a}^2}{a^2}\right)f_T + \left(B + 6\frac{\dot{F}}{F}\frac{\dot{a}}{a}\right)f_B - f + \frac{V}{F} = 0. \quad (4.57)$$

$$\begin{aligned} & \dot{T}\dot{B}f_{BTB} + \dot{T}\dot{B}f_{BBT} + \dot{T}^2 f_{BT} + \dot{B}^2 f_{BB} - 2\frac{\dot{a}}{a}(\dot{T}f_{TT} + \dot{B}f_{TB}) + \\ & + \left(2\frac{\dot{F}}{F}\dot{T} + \ddot{T}\right)f_{BT} + \left(2\frac{\dot{F}}{F}\dot{B} + \ddot{B}\right)f_{BB} - \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}}{a}\frac{\dot{F}}{F} - \frac{1}{2}T\right)f_T + \\ & + \left(\frac{\ddot{F}}{F} + \frac{1}{2}B\right)f_B - \frac{1}{2}f - \frac{1}{2F}\left[\frac{i}{2}(\bar{\psi}\gamma^0\dot{\psi} - \dot{\bar{\psi}}\gamma^0\psi) - V\right] = 0, \end{aligned} \quad (4.58)$$

$$\dot{\psi} + \frac{3}{2}\frac{\dot{a}}{a}\psi + iV'\gamma^0\psi - iF'\gamma^0\psi = 0, \quad (4.59)$$

$$\dot{\bar{\psi}} + \frac{3}{2}\frac{\dot{a}}{a}\bar{\psi} - iV'\bar{\psi}\gamma^0 - iF'\bar{\psi}\gamma^0 = 0, \quad (4.60)$$

Келесі бөлімде осы теңдеулер жүйесін шешу үшін біз Нетер теорема әдісін қолданамыз.

#### 4.2.2 Нетер теорема әдісін $f(T, B)$ телепараллель гравитацияда қолдану

Нетер теоремасыда Ли алгебрасындағы берілген  $X$  вектор өрісіне қатысты лагранжиан туындысына көбейтіндісі жойылатынын айтады  $XL = 0$ . Зерттелетін модель үшін Нетер симметриясын іздейміз. Спинор өрісінің компоненттері  $\psi = (\psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3)^T$  және оның  $\bar{\psi} = (\psi_0^+, \psi_1^+, -\psi_2^+, -\psi_3^+)$  түйіндесі үшін (4.56) Лагранж функциясын келесідей қайта жазамыз

$$L = Fa^3 f - Fa^3 Tf_T - 6Fa\dot{a}^2 f_T - Fa^3 Bf_B + 6\dot{F}a^2 \dot{a}f_B + 6Fa^2 \dot{a}\dot{T}f_{BT} + 6Fa^2 \dot{a}\dot{B}f_{BB} + \frac{i}{2}a^3(\bar{\psi}\gamma^0\dot{\psi} - \dot{\bar{\psi}}\gamma^0\psi) - a^3V. \quad (4.61)$$

Мұндағы,  $X$  векторлық өрісін келесідей жаза аламыз

$$XL = \alpha \frac{\partial}{\partial a} + \beta \frac{\partial}{\partial T} + \gamma \frac{\partial}{\partial B} + \dot{\alpha} \frac{\partial}{\partial \dot{a}} + \dot{\beta} \frac{\partial}{\partial \dot{T}} + \dot{\gamma} \frac{\partial}{\partial \dot{B}} + \sum_{i=0}^3 \left( \eta_i \frac{\partial}{\partial \psi_i} + \dot{\eta}_i \frac{\partial}{\partial \dot{\psi}_i} + \chi_i \frac{\partial}{\partial \psi_i^+} + \dot{\chi}_i \frac{\partial}{\partial \dot{\psi}_i^+} \right). \quad (4.62)$$

Яғни,

$$\dot{\alpha} = \frac{\partial \alpha}{\partial a} \dot{a} + \frac{\partial \alpha}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial \alpha}{\partial B} \dot{B} + \sum_{i=0}^3 \left( \frac{\partial \alpha}{\partial \psi_i} \dot{\psi}_i + \frac{\partial \alpha}{\partial \psi_i^+} \dot{\psi}_i^+ \right),$$

$$\dot{\beta} = \frac{\partial \beta}{\partial a} \dot{a} + \frac{\partial \beta}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial \beta}{\partial B} \dot{B} + \sum_{i=0}^3 \left( \frac{\partial \beta}{\partial \psi_i} \dot{\psi}_i + \frac{\partial \beta}{\partial \psi_i^+} \dot{\psi}_i^+ \right),$$

$$\dot{\gamma} = \frac{\partial \gamma}{\partial a} \dot{a} + \frac{\partial \gamma}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial \gamma}{\partial B} \dot{B} + \sum_{i=0}^3 \left( \frac{\partial \gamma}{\partial \psi_i} \dot{\psi}_i + \frac{\partial \gamma}{\partial \psi_i^+} \dot{\psi}_i^+ \right),$$

$$\dot{\eta}_i = \sum_{i=0}^3 \left( \frac{\partial \eta_i}{\partial a} \dot{a} + \frac{\partial \eta_i}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial \eta_i}{\partial B} \dot{B} + \sum_{j=0}^3 \left( \frac{\partial \eta_i}{\partial \psi_j} \dot{\psi}_j + \frac{\partial \eta_i}{\partial \psi_j^+} \dot{\psi}_j^+ \right) \right),$$

$$\dot{\chi}_i = \sum_{i=0}^3 \left( \frac{\partial \chi_i}{\partial a} \dot{a} + \frac{\partial \chi_i}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial \chi_i}{\partial B} \dot{B} + \sum_{j=0}^3 \left( \frac{\partial \chi_i}{\partial \psi_j} \dot{\psi}_j + \frac{\partial \chi_i}{\partial \psi_j^+} \dot{\psi}_j^+ \right) \right),$$

мұнда  $\alpha, \beta, \gamma, \eta_i, \chi_i$  – генераторлары,  $a, T, B, \psi_i, \psi_i^+$  – айнымалыларының белгісіз функциялары.

Жалпы алғанда, Нетер симметриясының шартты  $\alpha, \beta, \gamma, \eta_i, \chi_i$  айнымалыларға қатысты  $a, T, B, \psi_i, \psi_i^+$  дербес туындысы болатын коэффициенттері бар  $\dot{a}, \dot{T}, \dot{B}, \dot{\psi}_i, \dot{\psi}_i^+$  екінші дәреженің өрнектелуіне алып келеді. Осылайша, осы коэффициенттер нөлге тең болған жағдайда ғана алынған өрнек нөлге тең болады. Бұл бізге  $\alpha, \beta, \gamma, \eta_i, \chi_i$  бойынша дербес туындылары дифференциалдық теңдеулер жиынтығын береді. (4.61) теңдеудегі лагранжиан үшін Нетер симметриясының шартты (4.62) келесі дербес туындылары бар дифференциалдық теңдеулер жүйесін береді.

$$\alpha f_T + 2\alpha f_T \frac{\partial \alpha}{\partial a} + \beta \alpha f_{TT} - a^2 f_{TB} \frac{\partial \beta}{\partial a} + \gamma \alpha f_{TB} - a^2 f_{BB} \frac{\partial \gamma}{\partial a} + \alpha f_T \frac{F'}{F} \varepsilon_j (\eta_j \psi_j^+ + \chi_j \psi_j) - a^2 f_B \frac{F'}{F} \varepsilon_j \left( \frac{\partial \eta_j}{\partial a} \psi_j^+ + \frac{\partial \chi_j}{\partial a} \psi_j \right) = 0, \quad (4.63)$$

$$6a^2 Ff_{TB} \frac{\partial \alpha}{\partial T} = 0, \quad (4.64)$$

$$6a^2 Ff_{BB} \frac{\partial \alpha}{\partial B} = 0, \quad (4.65)$$

$$6a^2 F'f_B \varepsilon_j \frac{\partial \alpha}{\partial \psi_j^+} \psi_j^+ = 0, \quad (4.66)$$

$$6a^2 F'f_B \varepsilon_j \frac{\partial \alpha}{\partial \psi_j^+} \psi_j^+ = 0, \quad (4.67)$$

$$\begin{aligned} & 2\alpha f_{BT} - 2f_T \frac{\partial \alpha}{\partial T} + \alpha f_{BT} \frac{\partial \alpha}{\partial a} + \beta \alpha f_{BT} + \alpha f_{BT} \frac{\partial \beta}{\partial T} + \gamma \alpha f_{BT} + \alpha f_{BB} \frac{\partial \gamma}{\partial T} + \\ & \alpha f_{BT} \frac{F'}{F} \varepsilon_j (\eta_j \psi_j^+ + \chi_j \psi_j) + \alpha f_B \frac{F'}{F} \varepsilon_j \left( \frac{\partial \eta_j}{\partial T} \psi_j^+ + \frac{\partial \chi_j}{\partial T} \psi_j \right) = 0, \end{aligned} \quad (4.68)$$

$$\begin{aligned} & 2\alpha f_{BB} - 2f_T \frac{\partial \alpha}{\partial B} + \alpha f_{BB} \frac{\partial \alpha}{\partial a} + \beta \alpha f_{BB} + \alpha f_{BT} \frac{\partial \beta}{\partial B} + \gamma \alpha f_{BB} + \alpha f_{BB} \frac{\partial \gamma}{\partial B} + \\ & \alpha f_{BB} \frac{F'}{F} \varepsilon_j (\eta_j \psi_j^+ + \chi_j \psi_j) + \alpha f_B \frac{F'}{F} \varepsilon_j \left( \frac{\partial \eta_j}{\partial B} \psi_j^+ + \frac{\partial \chi_j}{\partial B} \psi_j \right) = 0, \end{aligned} \quad (4.69)$$

$$\begin{aligned} & \left( 2\alpha f_B + \alpha f_B \frac{\partial \alpha}{\partial a} + \beta \alpha f_{BT} + \gamma \alpha f_{BB} \right) F' \psi_j^+ \varepsilon_j + \alpha f_B F'' \varepsilon_i \varepsilon_j (\eta_i \psi_i^+ + \chi_i \psi_i) \psi_j^+ + \\ & \varepsilon_j \chi_j \alpha f_B F' + F \left( \alpha f_{BT} \frac{\partial \beta}{\partial \psi_j} + \alpha f_{BB} \frac{\partial \gamma}{\partial \psi_j} - 2f_T \frac{\partial \alpha}{\partial \psi_j} \right) + \\ & \alpha f_B F' \varepsilon_j \left( \frac{\partial \eta_j}{\partial \psi_i} \psi_j^+ + \frac{\partial \chi_j}{\partial \psi_i} \psi_j \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.70)$$

$$\begin{aligned} & \left( 2\alpha f_B + \alpha f_B \frac{\partial \alpha}{\partial a} + \beta \alpha f_{BT} + \gamma \alpha f_{BB} \right) F' \psi_j \varepsilon_j + \alpha f_B F'' \varepsilon_i \varepsilon_j \psi_j (\eta_i \psi_i^+ + \chi_i \psi_i) + \varepsilon_j \eta_j \alpha f_B F' \\ & + F \left( \alpha f_{BT} \frac{\partial \beta}{\partial \psi_j^+} + \alpha f_{BB} \frac{\partial \gamma}{\partial \psi_j^+} - 2f_T \frac{\partial \alpha}{\partial \psi_j^+} \right) + \alpha f_B F' \varepsilon_j \left( \frac{\partial \eta_j}{\partial \psi_i^+} \psi_j^+ + \frac{\partial \chi_j}{\partial \psi_i^+} \psi_j \right) = 0, \end{aligned} \quad (4.71)$$

$$Ff_{BT} \frac{\partial \alpha}{\partial \psi_j} + F'f_B \varepsilon_j \frac{\partial \alpha}{\partial T} \psi_j^+ = 0, \quad (4.72)$$

$$Ff_{BT} \frac{\partial \alpha}{\partial \psi_j^+} + F'f_B \varepsilon_j \frac{\partial \alpha}{\partial T} \psi_j = 0, \quad (4.73)$$

$$Ff_{BB} \frac{\partial \alpha}{\partial \psi_j} + F'f_B \varepsilon_j \frac{\partial \alpha}{\partial B} \psi_j^+ = 0, \quad (4.74)$$

$$Ff_{BB} \frac{\partial \alpha}{\partial \psi_j^+} + F'f_B \varepsilon_j \frac{\partial \alpha}{\partial B} \psi_j = 0, \quad (4.75)$$

$$f_{BT} \frac{\partial \alpha}{\partial B} + f_{BB} \frac{\partial \alpha}{\partial T} = 0, \quad (4.76)$$

$$\varepsilon_j \left( \frac{\partial \alpha}{\partial \psi_j} \psi_i + \frac{\partial \alpha}{\partial \psi_j^+} \psi_i^+ \right) = 0, \quad (4.77)$$

$$\varepsilon_j \left( \frac{\partial \eta_j}{\partial a} \psi_j^+ + \frac{\partial \chi_j}{\partial a} \psi_j \right) = 0, \quad (4.78)$$

$$\varepsilon_j \left( \frac{\partial \eta_j}{\partial T} \psi_j^+ + \frac{\partial \chi_j}{\partial T} \psi_j \right) = 0, \quad (4.79)$$

$$\varepsilon_j \left( \frac{\partial \eta_j}{\partial B} \psi_j^+ + \frac{\partial \chi_j}{\partial B} \psi_j \right) = 0, \quad (4.80)$$

$$3\alpha \psi_j^+ \varepsilon_j + a \chi_j \varepsilon_j + a \varepsilon_j \left( \frac{\partial \eta_j}{\partial \psi_i} \psi_j^+ - \frac{\partial \chi_j}{\partial \psi_i} \psi_j \right) = 0, \quad (4.81)$$

$$3\alpha \psi_j \varepsilon_j + a \eta_j \varepsilon_j - a \varepsilon_j \left( \frac{\partial \eta_j}{\partial \psi_i^+} \psi_j^+ - \frac{\partial \chi_j}{\partial \psi_i^+} \psi_j \right) = 0, \quad (4.82)$$

$$(f - Tf_T - Bf_B) \left[ 3\alpha + a \frac{F'}{F} \varepsilon_j (\eta_j \psi_j^+ + \chi_j \psi_j) \right] - \beta a (Tf_{TT} + Bf_{BT}) - \gamma a (Tf_{TB} + Bf_{BB}) = 0, \quad (4.83)$$

$$3\alpha V + aV' \varepsilon_j (\eta_j \psi_j^+ + \chi_j \psi_j) = 0. \quad (4.84)$$

мұндағы  $\varepsilon_j = 1$  егер  $i = 0, 1$  және  $\varepsilon_j = -1$ , егер  $i = 2, 3$ . Бұл жүйе  $\dot{a}^2, \dot{T}^2, \dot{B}^2, \dot{\psi}_i^2, (\dot{\psi}_i^+)^2, \dot{a}\dot{T}, \dot{a}\dot{B}, \dot{a}\dot{\psi}_i, \dot{a}\dot{\psi}_i^+, \dot{T}\dot{B}, \dot{T}\dot{\psi}_i, \dot{T}\dot{\psi}_i^+, \dot{B}\dot{\psi}_i, \dot{B}\dot{\psi}_i^+, \dot{\psi}_i\dot{\psi}_j^+, \dot{a}, \dot{T}, \dot{B}, \dot{\psi}_i, \dot{\psi}_i^+$

шамаларына жіктеу бойынша алынады.

Кейбір математикалық амалдарды қолданып есептегеннен кейін өріс генераторлары  $\alpha, \beta, \gamma, \eta_j, \chi_j$  үшін дербес шешімдер табамыз

$$\alpha(a) = \alpha_0 a^n, \quad (4.85)$$

$$\beta(a, T) = 2\alpha_0(n-1)a^{n-1}T, \quad (4.86)$$

$$\gamma(a, B) = 2\alpha_0(n-1)a^{n-1}B, \quad (4.87)$$

$$\eta_j(a, \psi_j) = -\left(\frac{3}{2}\alpha_0 a^{n-1} + \varepsilon_j \eta_0\right)\psi_j, \quad (4.88)$$

$$\chi_j(a, \psi_j^+) = -\left(\frac{3}{2}\alpha_0 a^{n-1} - \varepsilon_j \eta_0\right)\psi_j^+, \quad (4.89)$$

мұндағы  $\alpha_0, \eta_0$  және  $n$  белгісіз тұрақты шамалар ( $n \neq 1$ ). Сондай-ақ, байланыс функциясы  $F(u)$  потенциал  $V(u)$  және  $f(T, B)$  үшін арнайы шешімдерді төмендегідей табамыз

$$F(u) = F_0 u^{\frac{m}{3}}, \quad (4.90)$$

$$V(u) = V_0 u, \quad (4.91)$$

$$f(T, B) = C_0 T^{\frac{1-m-2}{2n-2}} + \frac{m(n-1)}{m-2n-1} T + B, \quad (4.92)$$

мұнда  $C_0, F_0, V_0$  және  $m$  тұрақты шамалар. Келесі бөлімде (4.90)-(4.92) шешімдерді (4.57)-(4.60) қозғалыс теңдеулеріне қолданамыз.

4.2.3  $f(T, B)$  телепараллель гравитациясы үшін нақты космологиялық шешімдер

Байланыс және потенциалдық функциялар  $u$  сызықты емес функцияға тәуелді болғандықтан, қозғалыс теңдеулеріне (4.58) және (4.59) формулаларын қолданып, келесіні анықтаймыз:

$$u + 3 \frac{\dot{a}}{a} u = 0, \quad (4.93)$$

демек,

$$u = \frac{u_0}{a^3}. \quad (4.94)$$

мұнда  $u_0$  интегралдау тұрақтысы болып табылады. Өріс теңдеулерін тікелей интегралдауға болатындықтан, Нетер симметрияларымен байланысты қозғалыс тұрақтыларын есептеудің қажеті жоқ. Сондай-ақ қозғалыс тұрақтылары өріс теңдеулеріне жаңа шектеулер бермейді. Жоғарыдағы (4.57) және (4.60) қозғалыс теңдеулеріне (4.90)-(4.92) шешімдерін қойсақ, онда

$$\mu \dot{a}(t)^2 + \nu a^{m-1} = 0, \quad (4.95)$$

мұнда,  $\mu$  және  $\nu$  тұрақты шамалар:

$$\mu = -6 \left[ \frac{(m-n-1)C_0}{n-1} + \frac{m(n-1)}{m-2n-1} + m \right],$$

$$\nu = \frac{V_0 u_0^{1-\frac{m}{3}}}{F_0}.$$

Маштабты фактордың нақты шешімін (4.95) теңдеулерін қолданып анықтаймыз

$$a(t) = 4^{\frac{1}{m-3}} \left( -\frac{\mu}{(m-3)^2 (t+C_1)^2 \nu} \right)^{\frac{1}{m-3}}. \quad (4.96)$$

Осындағы  $C_1$  интегралдау тұрақтысы.

Хаббл параметрін маштабты фактордың нақты шешімін (4.96) қолданып келесі түрде жазамыз

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{6-2m}{(m-3)^2 (t-C_1)}. \quad (4.97)$$

Энергия тығыздығы мен қысымды анықтайтын болсақ

$$\rho = \frac{12}{(m-3)^2 (t-C_1)}, \quad (4.98)$$

$$p = \frac{4m}{(m-3)^2 (t-C_1)}. \quad (4.99)$$



Күй теңдеуін параметрін келесі түрде жазуға болады

$$\omega = \frac{p}{\rho} = -\frac{1}{3}m, \quad (4.100)$$

және баяулау параметрі

$$q = -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}} = -\frac{1}{2}(m-1). \quad (4.101)$$

Егер,  $m = -1$  болса, онда күй теңдеуі параметрі  $\omega = 1/3$  шамасына тең болады, бұл шешім инфляцияға дейінгі сәулелену басым болған кезеңді сипаттайды. Егер,  $m = 0$  деп алсақ, онда  $\omega = 0$  бұл фермиондық өрістің стандартты материя сияқты әрекет ететінін білдіреді. Егер  $m > 4$  болса  $\omega < -1$  фантомдық фазаға сәйкес келеді, ал  $1 < \omega < 3$  интервалында күй теңдеуі параметрі  $-1 < \omega < -1/3$  квинтэссенцияға сай келеді. Соңында,  $m = 3$  болса онда  $\omega = -1$  бұл жағдайда КЭ моделіне сәйкес келеді. Осылайша, бұл нәтижелерді Әлемнің динамикасын сипаттау үшін қолдануға болады, алынған нәтижелер қазіргі уақытта белгілі бақылау деректерімен жақсы сәйкес келеді.

Осылайша, бұл тарауда  $f(T, B)$  телепараллель гравитацияда фермиондық өрісі бар біртекті және изотропты Әлемді қарастырдық, мұнда фермиондық өріс гравитациямен минималды емес байланысқан. Сәйкес қозғалыс теңдеулері алынады, олар дербес туындылары бар сызықтық емес дифференциалдық теңдеулер болып табылады. Бұл теңдеулерді шешу үшін біз Нетер теорема әдісін қолдандық. Бұл әдісті пайдалана отырып  $V(u)$  потенциалы,  $F(u)$  байланыс функциясы және  $f(T, B)$  функциялары үшін нақты шешімдерін алдық. Жоғарыдағы (4.90)-(4.92) табылған шешімдерін (4.60) теңдеуіне қойып,  $a(t)$  бір айнымалыға тәуелді теңдеу алдық. Бұл теңдеуді интегралдау (4.96) масштабтық фактор шешімін береді. Сондай-ақ, зерттеген модель үшін  $H(t)$  Хаббл параметрі, фермиондық өрістің  $\rho$  энергия тығыздығы мен  $p$  қысымы,  $\omega$  күй теңдеуі параметрін және  $q(t)$  баяулау параметрін анықтадық. Біз бұл параметрлердің сәулелену кезеңнен соңғы уақытқа дейін Әлемнің ұлғаюының эволюциясының әртүрлі фазаларын сипаттауға қабілетті екенін анықтадық.

## ҚОРЫТЫНДЫ

Бұл диссертациялық жұмыс канондық емес лагранжиан материясы бар гравитацияның модификацияланған теориясында Әлемнің эволюциясын зерттеуге арналған. Диссертациялық жұмыстың негізгі нәтижелерінен келесі **тұжырымдарды** жасаймыз:

Бірінші тарауда, Палатини формализміндегі  $f(R)$  гравитациясымен ерте Әлемнің ұлғаюының инфляциялық моделі зерттелді. Мұнда көрсетілгендей Палатини формализмінде, вакуумда немесе ізсіз материя болған кезде таралмайтын скаляр өрістің салдарынан  $f(R)$  әсері инфляцияның нақты моделін құру үшін жеткіліксіз болғандықтан, инфляция белгілі бір  $e$ -*фолд* мөлшерінен кейін аяқталуы қажеттілігін ескере отырып біз космологиялық тұрақтыны қостық. Демек, Әлемнің инфляциялық модельдерін құруды қарастырудың жалғыз жолы материяның болуын қарастыру, жалпы алғанда сәйкес потенциалы бар бірыңғай скаляр өріс болуы бұл ЖСТ-да жасалғанға ұқсас болады. Соған қарамастан, гравитациялық әсерде Риччи скалярының сызықты емес функцияларының болуы Хаббл параметрінің динамикасында және инфлатон модификацияларын тудыратын тиімді потенциалға алып келеді. Мұнда Жордан координаттар жүйесінде жұмыс істей отырып, онда эффективті потенциалды алдық және баяу сырғу қозғалысын қарастырдық. Осы түрлендірулердің нәтижесінде сәйкес спектрлік параметр және тензордың скалярға қатынасы параметрі да өзгереді, сондықтан бірдей инфляциялық потенциал ЖСТ-да және Палатини формализмінде бірдей мәнді бермейді.

Екінші тарауда, Машиналық оқыту әдісінің бірі Гаусс процесінің космологияда қолданысын қарастырдық. ГП-сі және КЭ квинтэссенциясын жақсырақ бейнелейтін потенциалдың функционалды түрін реконструкциялау мақсатында Әлемнің ұлғаю жылдамдығы туралы қол жетімді деректер қолданылды. Бұрын жүргізілген зерттеулердің барлығына балама ретінде мұнда потенциалды модельден тәуелсіз реконструкциялау туралы толық ақпарат бердік. Сонымен қатар, реконструкциялау нәтижелерін жаңа потенциалдарды құру және еркін параметрлерді шектеу үшін пайдалануға болатынын көрсеттік. Фондық динамика туралы ең негізгі болжамдарға сүйене отырып, потенциал мен өрістің өзін  $H(z)$  және  $H'(z)$  арқылы сипаттауға болатындығын анықтадық және оларды Гаусс процесі үшін Әлемнің ұлғаю жылдамдығы туралы мәліметтерден модельге тәуелсіз түрде реконструкциялауға болатындығы дәлелденді.

Үшінші тарауда, телепараллель гравитация және  $f(T, B)$  гравитациялық теориялары аясында скалярлық өріспен толтырылған жазық және біртекті Әлемнің сипаттайтын модельдерін қарастырдық. Бұл модельдерде скалярлық өріс гравитациялық өріспен минималды емес байланыс жасайды. Вариациялық әдісті пайдаланып қозғалыс теңдеулерін анықтадық. Осы теңдеулерді шешу үшін Нетер теорема әдісін пайдаландық. Нақтырақ айтқанда  $F(\varphi)$  байланыс функциясының,  $V(\varphi)$  потенциалдық энергия және  $f(T, B)$  функцияларының

нақты шешімдері табылды. Алынған шешімдерді қозғалып теңдеуіне қолданып масштабты фактордың уақыт байланысты түрін, Хаббл параметрін, күй теңдеуі параметрін және баяулау параметрін анықтадық. Бұл анықталған шешімдер КЭ моделіне сәйкес келеді және Әлемнің кейінгі үдемелі ұлғаюын сипаттауға жарамды.

Төртінші бөлімде, екі түрлі мәселе қарастырылды. Бірінші, ФРУ кеңістік-уақыт метрикасы үшін  $f(R)$  гравитациясында  $f$  – эссенция моделі қарастырылды. Бұл модель үшін нүктелік лагранжиан және сәйкес өріс теңдеулерін анықталды. Нетер теорема әдісін қолдана отырып белгісіз  $h$ ,  $K$  және  $f$  функцияларының шешімдерін таптық. Табылған шешімдерді қолданып, космологиялық шешімдер анықтадық. Бұл шешімдер Әлемнің кейінгі үдемелі ұлғаю фазасын сипаттайтыны анықталды.

Екінші,  $f(T, B)$  телепараллельді гравитацияда фермиондық өрісі бар біртекті және изотропты Әлемді қарастырдық, мұнда фермиондық өріс гравитациямен минималды емес байланысқан. Сәйкес қозғалыс теңдеулері алынады, олар дербес туындылары бар сызықтық емес дифференциалдық теңдеулер болып табылады. Бұл теңдеулерді шешу үшін біз Нетер теорема әдісін қолдандық. Бұл теореманы пайдалана отырып  $V(u)$  потенциалмен  $F(u)$  байланыс функциясы және  $f(T, B)$  функциялары үшін нақты шешімдерін алдық. Сондай-ақ, зерттеген модель үшін  $H(t)$  Хаббл параметрі, фермиондық өрістің  $\rho$  энергия тығыздығы мен  $p$  қысымы,  $\omega$  күй параметрінің теңдеуі және  $q(t)$  баяулау параметрін анықтадық. Біз бұл параметрлердің сәулелену кезеңнен кейінгі уақытқа дейінгі Әлемнің ұлғаюының эволюциясының әртүрлі фазаларын сипаттауға қабілетті екенін дәлелдедік.

Қорытындылай келе, диссертациялық жұмысты орындау барысында көрсеткен жанжақты көмектері үшін өз алғысымды ғылыми кеңесшілерім ҚР ҰҒА академигі, физика-математика ғылымдарының докторы, профессор Мырзакулов Ратбай ағайға, физика-математика ғылымдарының кандидаты, доцент Мырзакулов Кайрат Ратбаевичке және шетелдік ғылыми кеңесшім PhD, профессор Дуглас Синглетонға білдіремін.

Сонымен қатар, Жалпы және теориялық физика кафедрасының профессор оқытушылар құрамына диссертациялық жұмысты талқылауға қатысып және моральдік көмек көрсеткені үшін алғысымды білдіремін.

## ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

- 1 Alpher R., Bethe H., Gamow G. The Origin of Chemical Elements // Physics Review. – 1948. – Vol. 73. – P. 803-804.
- 2 Starobinsky A. A new type of isotropic cosmological models without singularity // Physics Letters B. – 1980. – Vol. 91. – P. 99-102.
- 3 Mukhanov V.F., Chibisov G.V. «Quantum Fluctuation And Nonsingular Universe» // JETP Letters. – 1981. – Vol. 33. – P. 532-535.
- 4 Guth A.H. Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems // Physical Review D. – 1981. – Vol. 23. – P. 347-356.
- 5 Riess A. et al. Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant // The Astrophysical Journal. – 1998. – Vol. 116, Issue 3. – P. 1009-1038.
- 6 Perlmutter S. et al. Measurements of  $\Omega$  and  $\Lambda$  from 42 High-Redshift Supernovae // The Astrophysical Journal. – 2009. – Vol. 517, Issue 2. – P. 565-586.
- 7 Elizalde E., Khurshudyan M., Myrzakulov K. et al. Reconstruction of the quintessence dark energy potential from a Gaussian process // <https://arxiv.org/abs/2203.06767>. 15.06.2022.
- 8 Caldwell R. A Phantom menace? // Phys. Letters B. – 2002. – Vol. 545. – P. 23-29.
- 9 Gibbons G. Cosmological evolution of the rolling tachyon // Physics Letters B. – 2002. – Vol. 537. – P. 1-4.
- 10 De Felice A., Tsujikawa S.  $f(R)$  Theories // Living Reviews in Relativity. – 2010. – Vol. 13, Issue 1. – P. 1-161.
- 11 Myrzakulov R.  $f(T)$  gravity and k-essence // General Relativity and Gravitation. – 2012. – Vol. 44. – P. 3059-3080.
- 12 Kamenshchik A., Moschella U., Pasquier V. An Alternative to quintessence // Physics Letters B. – 2001. – Vol. 511. – P. 265-268.
- 13 Buchdah H.A. Non-Linear Lagrangians and Cosmological Theory // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. – 1970. – Vol. 150. – P. 1-8.
- 14 Baghran S., Rahvar S. Inverse problem: Reconstruction of the modified gravity action in the Palatini formalism by supernova type  $Ia$  data // Physical Review D. – 2009. – Vol. 80, Issue 2. – P. 124049.
- 15 Aoki K., Shimada K. Galileon and generalized Galileon with projective invariance in a metric-affine formalism // Physical Review D. – 2018. – Vol. 98. – P. 044038.
- 16 Capozziello S., Harko T., Koivisto T.K. et al. Cosmology of hybrid metric-Palatini  $f(R)$ -gravity // <https://iopscience.iop.org/article/10.1088>. 15.08.2021.
- 17 Bekov S. et al. General Slow-Roll Inflation in  $f(R)$  Gravity under the Palatini Approach // Symmetry. – 2020. – Vol. 12. – P. 1958-1-1958-13.
- 18 Уалиханова У.А., Сыздыкова А.М., Беков С.С. Солитонные решения уравнения Ландау-Лифшица с одноосной анизотропией // Вестник Казахский национальный технический университет имени К.И. Сатпаева. – 2015. – №6 – С. 513-520.

- 19 Уалиханова У.А., Беков С.С. Преобразование Дарбу для уравнения Ландау-Лифшица с одноосной анизотропией // Вестник Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева. – 2015. – №107. – С. 74-79.
- 20 Беков С. Остроконечные решения обобщенного уравнения Ландау-Лифшица // Ломоносов – 2015: тр. 11-й междунар. науч. конф. студентов, магистрантов и молодых ученых. – Астана, 2015. – С. 71-73.
- 21 Capozziello S., de Ritis R. Relation between the potential and nonminimal coupled in inflationary cosmology // Physics Letters A. – 1993. – Vol. 177, Issue1. – P. 1-7.
- 22 Belinchon J.A., Harko T., Mak M.K. Exact scalar-tensor cosmological models // International Journal of Modern Physics D. – 2017. – Vol. 26, Issue 07. – P. 1750073-1-1750073-11.
- 23 De Souza R.C., Kremer G.M. Noether symmetry for non-minimally coupled fermion fields // Classical and Quantum Gravity. – 2008. – Vol. 25, №22. – P. 225006-1-225006-9.
- 24 Kucukakca Y. Teleparallel dark energy model with a fermionic field via Noether symmetry // The European Physics Journal C. – 2014. – Vol. 74. – P. 3086-1-3086-7.
- 25 Bahamonde S., Capozziello S. Noether symmetry approach in  $f(T, B)$  teleparallel cosmology // The European Physics Journal C. – 2017. – Vol. 77. – P. 107-1-107-10.
- 26 Linde A.D. A new inflationary universe scenario: A possible solution of the horizon, flatness, homogeneity, isotropy and primordial monopole problems // Physics Letters B. – 1982. – Vol. 108. – P. 389-393.
- 27 Clifton T., Ferreira P.G. Padilla P., Skordis C. Modified gravity and cosmology // Physics Reports. – 2012. – Vol. 513. – P. 1-189.
- 28 Nojiri S., Odintsov D.S., Oikonomou V.K. Modified gravity theories on a nutshell: Inflation, bounce and late-time evolution // Physics Reports. – 2017. – Vol. 692. – P. 1-104.
- 29 Sotiriou T. P., Liberati S. Metric-affine  $f(R)$  theories of gravity // Annals of Physics. – 2007. – Vol.322. – P. 935-966.
- 30 Olmo J.G. Palatini approach to modified gravity:  $f(R)$  theories and beyond // International Journal of Modern Physics D. – 2011. – Vol. 20. – P. 413-462.
- 31 Vitagliano V., Sotiriou T.P., Liberati S. The dynamics of metric-affine gravity // Annals of Physics. – 2013. – Vol. 329. – P. 1259-1273.
- 32 Capozziello S., De Laurentis M. Extended Theories of Gravity // Physics Reports. – 2011. – Vol. 509. – P. 167-321.
- 33 Capozziello S., Harko T., Koivisto T.S. et al. Hybrid Metric-Palatini Gravity // Universe – 2015. – Vol. 1. – P. 199-238.
- 34 Jiménez B.; Heisenberg J., Koivisto T.S. Teleparallel Palatini theories // Journal of Cosmology and Astroparticle Physics. – 2018. – Vol. 8. – P. 039-1-039-27.
- 35 Leanizbarrutia I., Francisco S. N., Sáez-Gómez D. Crossing  $SNe Ia$  and BAO observational constraints with local ones in hybrid metric-Palatini gravity //

Physical Review D. – 2017. – Vol. 95. – P. 084046.

36 Böhmer C.G., Lobo F.S., Tamanini N. Einstein static universe in hybrid metric-Palatini gravity // Physical Review D. – 2013. – Vol. 88. – P. 104019.

37 Harko T., Koivisto T.K., Lobo F., Olmo G.J. Metric-Palatini gravity unifying local constraints and late-time cosmic acceleration // Physical Review D. – 2012. – Vol. 85. – P. 084016.

38 Gu B.M., Yu-Xiao Liu Y., Zhong Y. Stable Palatini  $f(R)$  braneworld // Physical Review D. – 2018. – Vol. 98. – P. 024027.

39 Rosa J.L, Carloni S., Lemos J.P. Cosmological phase space of generalized hybrid metric-Palatini theories of gravity // Physical Review D. – 2020. – Vol. 101. – P. 104056.

40 Rosa J.L, Carloni S., Lemos J.P. et al. Cosmological phase space of generalized hybrid metric-Palatini theories of gravity // Physical Review D. – 2017. – Vol. 95. – P. 124035.

41 Borowiec A., Kamionka M. et al. Cosmic acceleration from modified gravity with Palatini formalism // <https://iopscience.iop.org/article.02.04.2021>.

42 Xin-Juan Y., Da-Ming C.  $f(R)$  gravity theories in the Palatini formalism constrained from strong lensing // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. – 2009. – Vol. 394. – P. 1449-1458.

43 Tavakol S.R., Tsujikawa S.  $f(R)$  gravity theories in Palatini formalism: Cosmological dynamics and observational constraints // Physical Review D. – 2020. – Vol. 101. – P. 104056.

44 Lee S. Stability of Palatini- $f(R)$  cosmology // <https://arxiv.org/abs/0710.2395>. 10.08.2021.

45 Capozziello S., Lobo F.S., Mimoso J.P. Generalized energy conditions in extended theories of gravity // Physical Review D. - 2015. – Vol. 91. – P. 124019.

46 Toniato J.D., Rodrigues D.C., Wojnar A. Palatini  $f(R)$  gravity in the solar system: Post-Newtonian equations of motion and complete PPN parameters // Physical Review D. – 2020. – Vol. 101. – P. 064050.

47 Olmoa G.J., Rubiera-Garcia D., Wojnarde A. Stellar structure models in modified theories of gravity: Lessons and challenges // Physics Reports. – 2020. – Vol. 876. – P. 1-75.

48 Olmo J.G., Rubiera-Garcia D. Junction conditions in Palatini  $f(R)$  gravity // <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1361-6382/abb924>. 10.08.2021.

49 Goenner H. Alternative to the Palatini method: A new variational principle // Physical Review D. - 2010. – Vol. 81. – P. 124019.

50 Capozziello S., Vignolo S. The cauchy problem for metric-affine  $f(R)$  gravity in presence of a Klein–Gordon scalar field // International Journal of Geometric Methods in Modern Physics – 2011. - Vol. 08. – P. 167-176.

51 Faraoni V. Jebsen-Birkhoff theorem in alternative gravity // Physical Review D. – 2010. – Vol. 81. – P. 044002.

52 Afonso V. I., Olmo G.J, Rubiera-Garcia D. Mapping Ricci-based theories of gravity into general relativity // Physical Review D. - 2018. – Vol. 97. – P. 021503.

- 53 Olmo G.J., Rubiera-Garcia D., Jiménez J.B. et al. Born–Infeld inspired modifications of gravity // *Physics Reports*. – 2018. – Vol. 727. – P. 1-129.
- 54 Olmo G.J., Rubiera-Garcia D. Nonsingular Black Holes in  $f(R)$  Theories // *Universe*. – 2015. – Vol. 1, Issue 2. – P. 173-185.
- 55 Olmo G.J., Rubiera-Garcia D. Reissner-Nordström black holes in extended Palatini theories // *Physical Review D*. – 2012. – Vol. 86. – P. 044014.
- 56 Menchon C.C., Olmo G.J., Rubiera-Garcia D. Nonsingular black holes, wormholes, and de Sitter cores from anisotropic fluids // *Physical Review D*. – 2017. – Vol. 96. – P. 104028.
- 57 Bambi C., Cardenas-Avendano A., Olmo G.J. et al. Wormholes and nonsingular spacetimes in Palatini  $f(R)$  gravity // *Physical Review D*. – 2016. – Vol. 93. – P. 064016.
- 58 Capozziello S., Harko T., Koivisto T.S. et al. Wormholes supported by hybrid metric-Palatini gravity // *Universe* – 2012. – Vol. 86. – P. 127504.
- 59 Kozak A., Borowiec A. Palatini frames in scalar–tensor theories of gravity // *The European Physical Journal C*. – 2019. – Vol. 79. – P. 335-1-335-39.
- 60 Liddle A.R., Lyth D.H. *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure*. – Cambridge, 2000. – 400 p.
- 61 Dodelson S. *Modern Cosmology*. – Cambridge, 2003. – 440 p.
- 62 Mukhanov V.F. *Physical Foundations of Cosmology*. – Cambridge, 2005. – 442 p.
- 63 Mukhanov V.F., Feldman H.A., Brandenberger R.H. Theory of cosmological perturbations // *Physics Reports*. – 1992. – Vol. 215. – P. 203-333.
- 64 Liddle A.R. An Introduction to cosmological inflation // <https://arxiv.org/abs/astro-ph/9901124>. 05.09.2021.
- 65 Langlois D. Lectures on inflation and cosmological perturbations // <https://arxiv.org/abs/1001.5259>. 05.09.2021.
- 66 Lidsey J.E., Liddle A.R., Kolb W.E. et al. Reconstructing the inflaton potential-an overview // *Rev. Mod. Phys.* – 1997. – Vol. 69. – P. 373-410.
- 67 Elizalde E., Nojiri S., Odintsov S. et al. Reconstructing the universe history, from inflation to acceleration, with phantom and canonical scalar fields // *Physical Review D*. – 2008. – Vol. 77. – P. 106005.
- 68 Ade A.R., Aghanim N., Arnaud M. et al. Planck 2015 results. XX. Constraints on inflation // *Astron. Astrophys.* – 2016. – Vol. 594. – P. A20-1-A20-65
- 69 Akrami Y., Arroja F., Ashdown M. et al. Planck 2018 results. X. Constraints on inflation // <https://arxiv.org/abs/1807.06211>. 05.09.2021.
- 70 Cognola G., Elizalde E., Nojiri S. et al. Class of viable modified  $f(R)$  gravities describing inflation and the onset of accelerated expansion. – 2008. – Vol. 77. – P. 046009.
- 71 Nojiri Sh., Odintsov S.D. Modified gravity with negative and positive powers of curvature: Unification of inflation and cosmic acceleration // *Physical Review D*. – 2003. – Vol. 68. – P. 123512.
- 72 Nojiri Sh., Odintsov S.D. Modified  $f(R)$  gravity unifying  $R^m$  inflation with the  $\Lambda$ CDM epoch // *Physical Review D*. – 2008. – Vol. 77. – P. 026007.

73 Cognola G., Elizalde E., Odintsov S.D. et al. Initial and final de Sitter universes from modified  $f(R)$  gravity // *Physical Review D.* – 2009. – Vol. 79. – P. 044001.

74 Bamba K., Nojiri Sh., Odintsov S.D., Sáez-Gómez D. Inflationary universe from perfect fluid and  $f(R)$  gravity and its comparison with observational data // *Physical Review D.* – 2014. – Vol. 90. – P. 124061.

75 Cruz-Dombriz A., Elizalde E., Odintsov S.D. et al. Spotting deviations from  $R^2$  inflation // *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics.* – 2016. – Vol. 5. – P. 060-1-060-24.

76 Odintsov S., Sáez-Chillón G., Sharov G.S. Is exponential gravity a viable description for the whole cosmological history? // *The European Physical Journal C.* – 2017. – Vol. 77. – P. 862-1-862-17.

77 Sebastiani L., Cognola G., Myrzakulov R. et al. Nearly Starobinsky inflation from modified gravity // *Physical Review D.* – 2014. – Vol. 89. – P. 023518.

78 Sebastiani L., Myrzakulov R.  $f(R)$  gravity and inflation // *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics.* – 2015. – Vol. 12. – P. 1530003.

79 Myrzakulov R., Odintsov S.D., Sebastiani L. Inflationary universe from higher-derivative quantum gravity // *Physical Review D.* – 2015. – Vol. 91. – P. 083529.

80 Bamba K., Myrzakulov R., Odintsov S.D. et al. Trace-anomaly driven inflation in modified gravity and the BICEP2 result // *Physical Review D.* – 2014. – Vol. 90. – P. 043505.

81 Bauera F., Demir D.A. Inflation with non-minimal coupling: Metric vs. Palatini formulations // *Physics Letters B.* – 2008. – Vol. 665. – P. 222-226.

82 Shimada K., Aoki K., Maeda K. Metric-affine gravity and inflation // *Physical Review D.* – 2019. – Vol. 99. – P. 104020.

83 Gialamas D., Karam A., Racioppi A. Dynamically induced Planck scale and inflation in the Palatini formulation // *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics.* – 2020. – Vol. 2020. – P. 014-1-014-23.

84 Tenkanen T. Tracing the high energy theory of gravity: an introduction to Palatini inflation // *General Relativity and Gravitation.* – 2020. – Vol. 52. – P. 33-1-33-24.

85 Das N., Panda S. Inflation and Reheating in  $f(R, h)$  theory formulated in the Palatini formalism // <https://iopscience.iop.org/article/10.1088.10.06.2021>.

86 Jarv L., Racioppi A., Tenkanen T. Palatini side of inflationary attractors // *Physical Review D.* – 2018. – Vol. 97. – P. 083513.

87 Tenkanen T. Resurrecting Quadratic Inflation with a non-minimal coupling to gravity // *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics.* – 2017. – Vol. 2017. – P. 029-1-029-11.

88 Tenkanen T. et al. Quantum corrections to quartic inflation with a non-minimal coupling: metric vs. Palatini // *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics.* – 2018. – Vol. 2018. – P. 029-1-029-16.

89 Antoniadis I., Karam A., Lykkas T. et al. Rescuing quartic and natural



inflation in the Palatini formalism // Journal of Cosmology and Astroparticle Physics. – 2019. – Vol. 2019. – P. 005-1-005-18.

90 Antoniadis I., Karam A., Lykkas A. et al. Palatini inflation in models with an  $R^2$  term // Journal of Cosmology and Astroparticle Physics. – 2018. – Vol. 2018. – P. 028-1-028-23.

91 Enckell M., Enqvist K., Rasanen S. et al. Inflation with  $R^2$  term in the Palatini formulation // Journal of Cosmology and Astroparticle Physics. – 2019. – Vol. 2019. – P. 022-1-022-9.

92 Edery A., Nakayama Yu. Palatini formulation of pure  $R^2$  gravity yields Einstein gravity with no massless scalar // Physical Review D. – 2019. – Vol. 99. – P. 124018.

93 Stachowski A., Szydłowski M., Borowiec A. Starobinsky cosmological model in Palatini formalism // The European Physical Journal C. – 2017. – Vol. 77, Issue 6. – P. 406-1-406-17.

94 Jarv L., Karam A., Kozak A. et al. Equivalence of inflationary models between the metric and Palatini formulation of scalar-tensor theories // Physical Review D. – 2020. – Vol. 102. – P. 044029.

95 Koivisto T., Kurki-Suonio H. Cosmological perturbations in the Palatini formulation of modified gravity // <https://arxiv.org/abs/astro-ph/0509422>. 04.08.2021.

96 Tamanini N., Carlo R. Contaldi Inflationary perturbations in Palatini generalized gravity // Physical Review D. – 2011. – Vol. 83. – P. 044018.

97 Chengjie F., Puxun W., Hongwei Yu. Inflationary dynamics and preheating of the nonminimally coupled inflaton field in the metric and Palatini formalisms // Physical Review D. – 2017. – Vol. 96. – P. 1035542.

98 Gialamas I., Lahanas A. Reheating in  $R^2$  Palatini inflationary models // Physical Review D. – 2020. – Vol. 101. – P. 084007.

99 Rubio J., Tomberg E. Preheating in Palatini Higgs inflation // Journal of Cosmology and Astroparticle Physics. – 2019. – Issue 4. – P. 021-1-021-25.

100 Bauer F., Demirb D. Higgs–Palatini inflation and unitarity // Physics Letters B. – Vol. 698. – P. 425-429.

101 Rasanen S. Higgs inflation in the Palatini formulation with kinetic terms for the metric // <https://arxiv.org/abs/1811.09514>. 10.06.2022.

102 Gialamas I., Karam A., Lykkas A. et al. Palatini-Higgs inflation with nonminimal derivative coupling // Physical Review D. – 2020. – Vol. 102. – P. 063522.

103 Tariq Z., Bhatti M. Z., Yousaf Z. On the stability of pressure isotropy condition in Palatini  $f(R)$  gravity // International Journal of Modern Physics. – 2021. – Vol. 30. – P. 2150058.

104 Raciopp A. Coleman-Weinberg linear inflation: metric vs. Palatini formulation // <https://arxiv.org/abs/1710.04853>. 106.06.2021.

105 Elizalde E., Khurshudyan M. Interplay between Swampland and Bayesian Machine Learning in constraining cosmological models // The European Physical Journal C. – 2021. – Vol. 81. – P. 335-1-335-13.

- 106 Elizalde E., Khurshudyan M., Odintsov S. et al. Analysis of the tension problem in the Universe with viscous dark fluid // *Physical Review Letters*. – 2020. – Vol. 102. – P. 123501.
- 107 Di Valentino E., Melchiorri A., Mena O. Vagnozzi Nonminimal dark sector physics and cosmological tensions // *Physical Review D*. – 2020. – Vol. 101. – P. 063502.
- 108 Bamba K., Capozziello S., Nojiri S. et al. Dark energy cosmology: the equivalent description via different theoretical models and cosmography tests // *Astrophysics and Space Science*. – 2012. – Vol. 342. – P. 155-228.
- 109 Odintsov S., Oikonomou K. Autonomous dynamical system approach for  $f(R)$  gravity // *Physical Review D*. – 2017. – Vol. 96. – P. 104049.
- 110 Yang W., Pan S., Mota D. et al. Forecast constraints on anisotropic stress in dark energy using gravitational waves // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. – 2020. – Vol. 497. – P. 879-893.
- 111 Yang W., Pan S., Vagnozzi S. et al. Dawn of the dark: unified dark sectors and the EDGES Cosmic Dawn 21-cm signal // *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*. – 2019. – Vol. 011. – P. 044-1-044-19.
- 112 Беков С.С., Мырзакулов К.Р. Машиналық оқытуда күнгір энергияның квинтэссенция потенциалын реконструкциялау // Ш. Уалиханов атындағы Көкшетау университеті хабаршы. – 2023. – Vol. 1. – P. 25-32.
- 113 Arturo L., López U., Roy N. Generalized tracker quintessence models for dark energy // *Physical Review D*. – 2020. – Vol. 102. – P. 063510.
- 114 Cai Y., Khurshudyan M., Saridakis E. Model-independent Reconstruction of  $R^2$  Gravity from Gaussian Processes // *The Astrophysical Journal*. – 2020. – Vol. 888. – P. 2-1-2-10.
- 115 Elizalde E., Khurshudyan M. Swampland criteria for a dark energy dominated universe ensuing from Gaussian processes and  $H(z)$  data analysis // *Physical Review D*. – 2019. – Vol. 99. – P. 103533.
- 116 Aljaf M., Gregoris D., Khurshudyan M. Constraints on interacting dark energy models through cosmic chronometers and Gaussian process // *The European Physical Journal C*. – 2021. – Vol. 81. – P. 544-1-544-15.
- 117 Elizalde E., Khurshudyan M., Nojiri S. Cosmological singularities in interacting dark energy models with an  $\omega(q)$  parametrization // *International Journal of Modern Physics D*. – 2019. – Vol. 28. – P. 1950019.
- 118 Brading K., Castellani E. *Symmetries in Physics: Philosophical Reflections*. – Cambridge: Cambridge University Press, 2003. – 17 p.
- 119 Fre G. *A Conceptual History of Space and Symmetry: From Plato to the Superworld*. – Berlin: Springer, 2018. – 319 p.
- 120 Stephani H. *Differential Equations: Their Solution Using Symmetries*. – Cambridge: Cambridge University Press, 1989. – 260 p.
- 121 Neuenschwander D. *Emmy Noether's Wonderful Theorem*. – Baltimore: Johns Hopkins University Press, 2017. – 344 p.
- 122 Kosmann-Schwarzbach Y., Schwarzbach E. *The Noether Theorems*. – NY.: Springer, 2011. – 205 p.

123 Bajardi F., Capozziello S. Noether Symmetries in Theories of Gravity with Applications to Astrophysics and Cosmology. – Cambridge: Cambridge University Press, 2023. – 452 p.

124 Kucukakca Y., Gecim G. Scalar–tensor teleparallel gravity with boundary term by Noether symmetries // <https://avesis.akdeniz.edu.tr/yayin>. 15.08.2021.

125 аль-Масгуди А.У., Беков С. Симметрия Нетер в  $F(T)$ - гравитации со скалярным полем и неминимальной связью // Вестник Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева. – 2016. – №2(111). – С. 315-320.

126 Bekov S. Anisotropic universe in modified teleparallel gravity and k-essence // Astrophysics, Gravity and Cosmology: proceed. of the 3th internat. scient. conf. – Астана, 2016. – P. 104-108.

127 Kalybai Zh., Ozat N. Bekov S. Noether symmetry in teleparallel gravity with k-essence // Astrophysics, Gravity and Cosmology: proceed. of the 3th internat. scient. conf. – Астана, 2016. – P. 114-118.

128 Беков С. Об одной анизотропной модели Вселенной в рамках  $F(T)$  гравитации // Наука и образование – 2016: тр. 11-й междунар. науч. конф. студентов и молодых ученых. – Астана, 2016. – С. 174-178.

129 Беков С. Некоторое применение теоремы Нетер в  $F(T)$ - гравитации со скалярным полем // Ломоносов – 2016: тр. 12-й междунар. науч. конф. студентов, магистрантов и молодых ученых. – Астана, 2016. – С. 27-28.

130 Myrzakulov Y., Sandal B., Bekov S. Generalized first and second laws of thermodynamics in  $F(T)$  theory of gravity with f-essences // Astrophysics, Gravity and Cosmology: proceed. of the 3th internat. scient. conf. – Астана, 2016. – P. 104-108.

131 Алтаева Г., Мырзакулов К.Р Беков С. Некоторая космологическая модель расширяющейся вселенной и k -эссенции // Вестник КГУ им. Ш. Уалиханова. – 2020. – №4. – С. 4-10.

132 Paliathanasis A., Basilakos S., Saridakis E.N. et al. New Schwarzschild-like solutions in  $f(T)$  gravity through Noether symmetries // Physical Review D. – 2014. – Vol. 89. – P. 104042.

133 Myrzakulov N., Myrzakulova S., Myrzakulov R. Cosmological model of  $F(T)$  gravity with fermion fields via Noether symmetry // Journal of Physics: Conference Series. – 2019. – Vol. 1391, Issue 1. – P. 012165.

134 Capozziello S., De Laurentis M., Saridakis E.  $f(T)$  teleparallel gravity and cosmology // Reports on Progress in Physics. – 2016. – Vol. 79. – P. 106901.

135 Nojiri Sh., Odintsov S., Sasaki M. Gauss-Bonnet dark energy // Physical Review D. - 2005. – Vol. 71. – P. 123509.

136 Ratra B., Peebles P. Cosmological consequences of a rolling homogeneous scalar field // Physical Review D. – 1988. – Vol. 37. – P. 3406-3427.

137 Caldwell R. Accelerating Expansion in a Closed Universe // Physics Letters B. – 2002. – Vol. 545. – P. 23-29.

138 Souza R., Kremer G. Constraining non-minimally coupled tachyon fields by the Noether symmetry // Physical Review D. - 2009. – Vol. 26. – P. 135008.

139 Armendariz-Picon C., Damour T., Mukhanov V.  $k$ -Inflation // *Physical Letters B.* – 1999. – Vol. 458. – P. 209-218.

140 Беков С.С., Кудайберген Н.С., Алтайбаева А.Б. Телепараллель гравитациясы мен скалярлық-тензорлық теориясының көмегімен жазық және изотропты ғаламның эволюциясын сипаттау // Ш. Уалиханов атындағы Көкшетау университеті хабаршы . – 2023. – №1. – Б. 4-10.

141 Tsyba P., Razina O., Bekov S. et al Scenario of the evolution of the universe with equation of state of the Weierstrass type gas // *Journal of Physics: Conference Series.* – 2019. – Vol. 1391. – P. 012162.

142 Myrzakulov K., Kenzhalin D., Myrzakulov N. Teleparallel gravity with non-minimally coupled  $f$ -essence via Noether symmetry approach // <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1730/1/012022>. 10.05.2021.

143 Тастемир А.Е., Беков С. Действие и уравнения движения в  $F(T,B)$  гравитации с фермионными полями // *Ломоносов* – 2018: тр. 14-й междунар. науч. конф. магистрантов и молодых ученых. – Астана, 2018. – С. 55-57.

144 Тулеева А.Д., Мантиева К.А., Беков С. Ғаламның эволюциясын сигма-моделі аясында сипаттау// *Наука и образование* – 2016: тр. 11-й междунар. науч. конф. молодых ученых. – Астана, 2016.– С. 413-419.

145 Capozziello S., Stabile A., Troisi A. Spherically symmetric solutions in  $f(R)$  gravity via the Noether symmetry approach // *Classical and Quantum Gravity.* – 2007. – Vol. 24. – P. 2153-1-2153-17.

146 Modak B., Kamilya S., Biswas S. Evolution of dynamical coupling in scalar tensor theory from Noether symmetry // *General Relativity and Gravitation.* – 2000. – Vol. 32. – P. 1615-1626.

147 Myrzakulov N., Myrzakulova S., Bekov S. et al. Cosmological model of  $f(T)$  gravity with fermion fields via Noether symmetry // *Journal of Physics: Conference Series.* – 2019. – Vol. 1391. – P. 012165-1-012165-9.

148 Sanyal A., Modak B., Rubano C. et al. Noether symmetry in the higher order gravity theory // *General Relativity and Gravitation.* – 2005. – Vol. 37.

149 Myrzakulov N., Bekov S., Myrzakulov K. Cosmological model of  $f(T)$  gravity with fermion fields in (2+1) dimensions // *Proceed. of the MG15 Meeting on General Relativity.* – Rome: University of Rome «La Sapienza», -2022.

150 Basilakos S., Capozziello S., De Laurentis M., Paliathanasis A., Tsamparlis M. Noether symmetries and analytical solutions in  $f(T)$  cosmology: A complete study // *Physical Review D.* – 2013. – Vol. 88. – P. 103526.

151 Bahamonde S., Capozziello S., Faizal M. et al. Nonlocal teleparallel cosmology // *The European Physical Journal C.* – 2017. – Vol. 77. – P. 628-1-628-8.

152 Myrzakulov K., Bekov S., Myrzakulov R. Some cosmological solutions of  $f(R)$  gravity with  $f$ -essence *Proceedings of the MG15 Meeting on General Relativity.* – Rome: University of Rome «La Sapienza», – 2022. P. 1217-1222.

153 Myrzakulov Y., Bekov S., Myrzakulov K. Noether symmetry approach in  $f(T,B)$  teleparallel gravity with a fermionic field // *Journal of Physics: Conference Series.* – 2021. – Vol. 2090. – P. 1-8.